



DIAC

DPTO. DE INGENIERÍA AUDIOVISUAL  
Y COMUNICACIONES



Telecomunicación  
*Campus Sur*

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA DE  
TELECOMUNICACIÓN

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA AUDIOVISUAL Y  
COMUNICACIONES

---

PROYECTO FIN DE CARRERA

## **ANTENAS CORRUGADAS**

ANTENAS DE BOCINA CÓNICA CORRUGADAS

---

AUTOR: Guillermo Silva Yaucan

TUTOR: Leandro de Haro Ariet

---

# 1. Antenas de Bocinas Cónicas Corrugadas

## Resumen

En la era actual de la tecnología en la que nos encontramos se han experimentado una infinidad de avances. En concreto el interés por las comunicaciones por satélite y los, cada vez más exigentes, terminales móviles han provocado que se inicie líneas de investigación en el campo de las telecomunicaciones.

En concreto el estudio de las Antenas de Bocina utilizadas como alimentadores en sistemas de satélite han generado gran interés por la comunidad académica y empresarial.

En este Proyecto Fin de Carrera se realiza el estudio del Método de Análisis Modal, método por el cual podemos realizar el estudio del comportamiento de los campos en recintos cerrados y con discontinuidades. El tipo de discontinuidades que se estudia son geometrías cilíndricas en las que se practica un incremento abrupto en el radio de salida.

El estudio para el caso inverso, es decir geometrías cilíndricas con radios de salida menores, también lo abordamos, es por esto que es posible la formación de corrugaciones.

El proyecto es una continuación de otro anterior que se centra en la optimización de bocinas cónicas lisas. Aunque el método se puede aplicar a cualquier tipo de geometría en este proyecto lo aplicaremos sólo a geometrías cilíndricas dado que diseñaremos un alimentador de bocina cilíndrica con paredes corrugadas.

Para el estudio y la implementación de las distintas formulaciones matemáticas haremos uso de la herramienta de cálculo MatLab, es así que podremos generar resultados como el diagrama de radiación de la antena diseñada. Dichos resultados serán contrastados con otro programa de análisis comercial.

Se observará que finalmente el método del análisis modal es una herramienta de cálculo robusta y consistente, que nos permite ahorrar tiempos de cálculo y nos presenta resultados similares a otras herramientas comerciales de análisis electromagnético.

# 1. Corrugated Conical Horn Antenna

## Abstrac

Technologies sector has made great progress . Specifically, in the area of the satellite communications and mobile communications . These have begun investigation lines in telecommunication areas. Particularly, the study about horn antennas use how feeders in satellite communications have generated high interest at University community and the space companies.

The Final Project study is focused in the Method of Modal Analysis, this method allows to study the performance of Electromagnetic fields in closed places with discontinuities.

This Project continues other project, where studied the optimization for smooth-wall conical horns. In this work we will use this study for implemented a antenna cylindrical corrugated.

For the study and implementation of special mathematical equations is necessary to use a calculus mathematical tool like MatLab, this software allows to draw the radiation pattern for antennas design. It should be emphasized that all results will be compare with others commercial softwares for Electromagnetic studies.

Finally, we take a look at the method of modal analysis is a robust and consistent mathematical tool that save simulation time and show us similar results to other commercial softwares.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>Objetivos</b>	<b>V</b>
<b>Organización.</b>	<b>VII</b>
<b>1. Teoría de Campos</b>	<b>1</b>
1.1. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	1
1.2. Propagación Electromagnética en una Guía de ondas Genérica .	6
1.3. Teoría de Modos . . . . .	8
1.3.1. Condiciones de contorno. . . . .	9
1.4. Modos Transversales Eléctricos y soluciones. . . . .	9
1.5. Modos Transversales Magnéticos y sus soluciones. . . . .	13
<b>2. Método de Adaptación Modal</b>	<b>17</b>
2.1. Fundamentos Teóricos . . . . .	17
2.2. Desarrollo del Método . . . . .	17
2.2.1. Expresiones de los campos en la discontinuidad . . . . .	19
2.2.2. Condiciones de contorno en la discontinuidad . . . . .	20
2.2.3. Propiedad de Ortogonalidad de los Campos . . . . .	21
2.3. Discontinuidad Radio Menor-Radio Mayor . . . . .	22
2.3.1. Primera ecuación . . . . .	22
2.3.2. Segunda ecuación . . . . .	23
2.3.3. Tercera ecuación . . . . .	24
2.3.4. Formulación matricial . . . . .	25
2.4. Matriz de dispersión Generalizada . . . . .	26
2.4.1. Condiciones geométricas . . . . .	27
2.4.2. Normalización de los modos . . . . .	29
2.5. Discontinuidad Radio Mayor-Radio Menor . . . . .	31
2.6. Cálculo de la Matriz de dispersión . . . . .	32
2.6.1. Cálculo de la impedancia del modo. . . . .	34
2.6.2. Cálculo de la constante de normalización de los modos. .	34
2.6.3. Cálculo Analítico de la matriz de cruce . . . . .	37

<b>3. Diseño de Antenas Corrugadas</b>	<b>45</b>
3.1. Análisis de estructura simple . . . . .	46
3.2. Propagación en una sección de guía . . . . .	47
3.3. Diseño de Corrugaciones . . . . .	48
3.3.1. Parámetros de las corrugaciones . . . . .	53
3.4. Perfiles de pruebas de diseño . . . . .	54
3.5. Diseño de la Antena. . . . .	55
3.6. Diagramas de radiación . . . . .	58
<b>4. Validación.</b>	<b>63</b>
4.1. Análisis de una Antena y comparativa con simulación en CST .	63
4.2. Diagramas de Campo. . . . .	65
<b>5. Conclusiones.</b>	<b>71</b>
<b>6. Líneas Futuras de Trabajo.</b>	<b>73</b>

# Agradecimientos.

La etapa universitaria de las personas no solo se ve condicionada por la capacidad intelectual de los estudiantes, para afrontar dicha etapa hay muchos factores que influyen en dicho proceso. Desde mi punto de vista, un factor decisivo es el entorno social en el que el estudiante se encuentra. En mi caso, ha sido debido a este factor influyente el que me ha permitido culminar mi etapa universitaria con satisfacción y comodidad. Por esta razón que aprovecho este momento para manifestar mi gratitud a las personas que estuvieron a mi lado en este camino.

A mi madre, que es el fiel reflejo de la lucha y la constancia por sobreponerse a los percances que se nos presentan en la vida. Su ejemplo de lucha y superación me ha guiado día a día. Sin su apoyo, tanto económico como anímico, que ha sido decisivo en esta etapa de mi vida.

A mi novia, que desde el principio confió y me apoyo desde el primer día, recordándome que solo se pierde si no se lucha. Su apoyo, cariño y paciencia han sido elementos clave que me han aportado fuerzas para alcanzar mis objetivos. A ella por estar siempre a mi lado, muchas gracias.

A mi hija, porque ha sido mi horizonte y me ha dado ese deber de ser referente en su crecer. Porque me ha llenado de ilusión y de esa obligación intrínseca de tener ejemplo que aportar en su vida.

En general toda mi familia, por estar presentes y pendientes en esta etapa universitaria, muchas gracias por confiar en mí y darme su apoyo.

De igual forma me gustaría hacer una mención especial a mi tutor, Leandro, que aunque ha sido poco el tiempo de conocernos me ha transmitido la idea de la lucha y el esfuerzo por conseguir lo que uno se plantea como objetivos. Por ser ese ejemplo que muchas personas deberían encontrar en su camino, por todo ello muchas gracias.





# Introducción

En el avance tecnológico exponencial que hemos experimentado hasta la actualidad y que se ha visto reflejado en los dispositivos terminales cada vez más exigentes en cuanto al ancho de banda, velocidad de procesamiento y transmisión de información, ha exigido que los sistemas de comunicación requieran de capacidades cada vez mayores y con ello la implantación de antenas de muy alto rendimiento: lóbulos laterales mínimos, niveles de polarización cruzada en el patrón de radiación reducidos, a la vez que el tamaño de la antena sea lo más compacta posible.

En cuanto a los niveles de polarización cruzada bajos, esta característica es inherente a la tecnología de antenas de bocina corrugadas. Este parámetro ha sido convenientemente mejorado durante las últimas décadas con el uso de alimentadores de paredes corrugadas.

El nivel de lóbulos laterales en alimentadores con paredes corrugadas <sup>1</sup>es de especial interés y apenas se han realizado mejoras. Probablemente porque la mejora en el nivel de lóbulos laterales no han sido realmente necesarias hasta ahora. La increíble cantidad de nuevos sistemas de comunicación que interactúan entre ellos ha hecho necesario reducir las interferencias mutuas a través de dichos lóbulos.

Por otro lado el proceso de fabricación de este tipo de antenas se ha mejorado durante los últimos años debido al uso masivo de fresadoras controladas con tecnología informática. Considerando que las dimensiones de las paredes con corrugaciones en las que nos movemos son de dimensiones de ondas milimétricas y submilimétricas se hace necesario el uso de electroconformadores de alta precisión. Esto añade el perjuicio del encarecimiento de esta técnica. Sin embargo, la reducción del tamaño de las antenas corrugadas es una gran ventaja, en donde el tamaño y el peso son variables sensibles a considerar, como por ejemplo, en sistemas de satélite.

Unas de las aplicaciones más comunes de las antenas de bocinas corrugadas es que se utilizan como alimentadores de parábolas de haz concentrado. Es

---

<sup>1</sup>Si consideramos a la Antena corrugada como un alimentador que ilumina un reflector.

así que su uso se ha restringido casi exclusivamente al mercado de los satélites. Por ello en los últimos años se ha realizado una investigación en todo el mundo centrado en la optimización de las antenas de bocina corrugadas. Se han diseñado programas de optimización avanzadas haciendo uso de computadoras con velocidad de procesamiento cada vez mas rápidos.

Por todas estas características asociadas a las antenas de bocinas corrugadas y los avances que se están realizando nos hemos decantado por dar luz a este Proyecto Fin de Carrera.

# Objetivos

El proyecto se fundamenta en el estudio del Método de Análisis Modal, el mismo que nos permite el tratamiento de los campos, existentes en un cambio de simetría o discontinuidad en el interior de una guía de ondas, como una suma infinita de campos pertenecientes a los distintos modos propios de una Guía.

El primer objetivo es el estudio en profundidad del Método de Análisis Modal, solo con su comprensión podremos ver si es posible la aplicación de este estudio al diseño de corrugaciones a partir de ahí dar el salto a la creación de estructuras mas complejas.

La idea fundamental es lograr una matriz de dispersión en la que se consideran todos los modos entrantes y los posibles modos salientes (acoplados y reflejados) en una discontinuidad.

Como segundo objetivo es la simulación de una estructura (Alimentador o Antena de bocina corrugada) con la interacción del programa MatLab y CST. La finalidad es comprobar la similitud de los resultados. En este sentido estudiaremos la posibilidad de utilizar las herramientas matemáticas utilizadas en el diseño de antenas lisas y aplicarlas en el estudio de Antenas con paredes corrugadas. Siendo éste el primer paso hacia una infinidad de aplicaciones que se podría dar en el estudio de las Antenas Corrugadas.

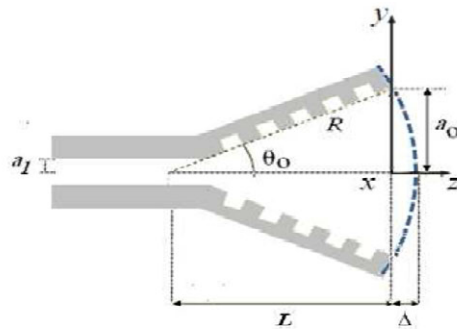


Figura 1: Corte transversal de una bocina corrugada.



# Organización.

Como cabe esperar no se puede realizar un estudio electromagnético en recintos cerrados (o abiertos) sin referirnos a las ecuaciones de Maxwell y las soluciones de onda para la ecuación que describe la propagación de ondas electromagnéticas. Es por ello que en el primer capítulo hacemos una revisión a dichas ecuaciones.

En el segundo capítulo nos centramos en la teoría de modos, en ella se analiza y clasifica los distintos modos que se propagan en el interior de una guía de onda cilíndrica circular y sus soluciones. El desarrollo se realizará en función de las coordenadas cilíndricas adaptadas a nuestras condiciones geométricas de trabajo.

En el tercer capítulo detallamos el desarrollo matemático del Método de Adaptación Modal. Una descripción precisa de los campos eléctricos y magnéticos internos de una guía es esencial para obtener los coeficientes de reflexión y transmisión de una antena con la guía que la alimenta y en la interface con el aire. El Método de Adaptación Modal centrado en el estudio de la propagación de modos en una guía de ondas proporciona una descripción exacta de los campos internos de una bocina. A partir de los campos transversales en la apertura de la antena se pueden determinar los campos radiados.

La técnica de Adaptación modal reemplaza el perfil real de una guía abocinada con un serie de secciones de guía de ondas en las que se va variando lentamente el área de la sección transversal, formando corrugaciones hasta llegar a formar una estructura abocinada llamada Alimentador o Antena en de Bocina Corrugada.

La técnica demuestra con exactitud cómo los campos eléctricos y magnéticos varían en el interior de la guía formando reflexiones y transmisiones de los modos, característica propia de la antena.

A continuación en un cuarto capítulo presentamos algunos resultados del método comparados con los resultados generados por el programa de Análisis Elec-

tromagnético comercial CST Microwave Studio <sup>2</sup>

CST suite estudio es un software de simulación electromagnética que utiliza técnicas de integración de elementos finitos (FIT) para realizar simulaciones Electromagnéticas. CST se compone de varios módulos, entre ellos el modulo de simulación en 3D de dispositivos de alta frecuencia el utilizado para este proyecto.

---

<sup>2</sup>CST Microwave Studio (CST MWS). Es una herramienta especializada para la simulación de componentes electromagnéticos de alta frecuencia.

# Capítulo 1

## Teoría de Campos

### 1.1. Ecuaciones de Maxwell

En el desarrollo de este trabajo vamos a suponer: que el interior de las guías no están rellenas de material dieléctrico alguno y que por tanto serán zonas libres de cargas y corrientes, que las relaciones  $\vec{D}=\epsilon\vec{E}$  y  $\vec{B}=\mu\vec{H}$ , que los conductores son perfectos y que no existen fuentes de campo en la región de propagación, con lo que las ecuaciones de Maxwell para el espacio vacío con las que vamos a trabajar son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \quad (1.4)$$

Con las consideraciones establecidas podemos realizar el desarrollo de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell para la propagación de los campos en el interior de una guía cilíndrica. Este tipo de desarrollos esta a disposición de la comunidad académica en una infinidad de publicaciones y estudios realizados con anterioridad, por ello aquí presentamos las expresiones recogidas en [1], solo que para nuestro interés las representamos en el sistema de coordenadas cilíndricas.

Desarrollando 1.3 en 1.4

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \omega^2 \mu \varepsilon \vec{H} \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \omega^2 \mu \varepsilon \vec{E} \quad (1.6)$$

El Laplaciano se define como:

$$\nabla^2 F = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla \times \nabla \times F \quad (1.7)$$

Si aplicamos 1.7 a 1.5 y 1.6 obtenemos<sup>1</sup>:

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \varepsilon \vec{E} = 0 \quad (1.8)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \mu \varepsilon \vec{H} = 0 \quad (1.9)$$

Que es la ecuación vectorial de onda homogénea armónica en el tiempo para el espacio vacío.

Ahora bien, si desarrollamos el Laplaciano en el sistema circular cilíndrico obtenemos la expresión:

$$\nabla^2 F \equiv \frac{\partial}{\rho \partial \rho} \left( \rho \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 F}{\rho^2 \partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad (1.10)$$

En donde  $F \equiv E \equiv H$ .

Podemos poner la función  $F$  dependiente de las variables espaciales

$$F(\rho, \phi, z) \equiv R(\rho) \Psi(\phi) Z(z) \quad (1.11)$$

Por lo que tenemos una función que podemos trabajar con ella mediante variables separadas.

Sustituyendo 1.11 en 1.10

$$\Psi(\phi) Z(z) \frac{\partial}{\rho \partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} R(\rho) \right) + R(\rho) Z(z) \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \phi^2} \Psi(\phi) + \Psi(\phi) R(\rho) \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z) = \omega^2 \mu \varepsilon R(\rho) \Psi(\phi) Z(z) \quad (1.12)$$

---

<sup>1</sup>Hemos aplicado la condición de campos irrotacionales y solenoides, pues los campos electromagnéticos lo son.



El primer término de la izquierda nos queda:

$$\Psi(\phi)Z(z)\frac{\partial}{\rho\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}R(\rho)) = \Psi(\phi)Z(z)\frac{1}{\rho}\left(R'(\rho) + \rho R''(\rho)\right)$$

El segundo:

$$R(\rho)Z(z)\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Psi(\phi) = R(\rho)Z(z)\frac{1}{\rho^2}\Psi''(\phi)$$

Antes de continuar el término que depende de la variable espacial  $Z$ , se define como:

$$Z(z) = e^{j\omega t \pm \gamma z} \quad (1.13)$$

Entonces podemos expresar el tercer término como:

$$\Psi(\phi)R(\rho)\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z(z) = \gamma^2\Psi(\phi)R(\rho)Z(z)$$

Por lo que nos indica que  $\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \gamma^2$ . Así mismo, el signo  $\pm\gamma$  denota la característica de onda que se propaga en sentido positivo y negativo paralelo al eje axial de propagación  $z$ , así mismo queda de manifiesto la dependencia de la expresión con la variable temporal  $t$ .

Al considerar el eje  $Z$  como el eje del sistema, y dado que la guía es homogénea a lo largo de dicha dirección, entonces, las ondas dependerán en  $Z$  a través de los factores de fase y de amortiguamiento, que podría representar la atenuación progresiva. Por tanto esta dependencia se representa con  $\gamma = \alpha + j\beta$ , y como ya mencionamos anteriormente consideramos  $\alpha = 0$ .

Si agrupamos los tres términos desarrollados obtenemos:

$$\Psi(\phi)Z(z)\frac{1}{\rho}R'(\rho) + \Psi(\phi)Z(z)R''(\rho) + R(\rho)Z(z)\frac{1}{\rho^2}\Psi''(\phi) + \left(\gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon\right)\Psi(\phi)R(\rho)Z(z) = 0 \quad (1.14)$$

Si multiplicamos ambos miembros por

$$\frac{\rho^2}{R(\rho)\Psi(\phi)Z(z)} \Rightarrow$$

Simplificamos a:

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \rho^2 (\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) + \frac{\Psi''(\phi)}{\Psi(\phi)} = 0 \quad (1.15)$$

Pasando el último término a través de la igualdad

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \rho^2 (\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) = -\frac{\Psi''(\phi)}{\Psi(\phi)} \quad (1.16)$$

Ahora podemos igualar, de forma separada, a un valor nulo:

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \rho^2 (\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) = 0 \quad (1.17)$$

$$-\frac{\Psi''(\phi)}{\Psi(\phi)} = 0 \quad (1.18)$$

Esta última ecuación (1.18), por su característica angular, ha de tener simetría de revolución alrededor del eje axial, por tanto si:

$$\frac{\Psi''(\phi)}{\Psi(\phi)} = -m^2$$

Entonces  $m$  ha de ser entero para que en los períodos de  $m$  a  $m + 2\pi$ ,  $\Psi(\phi)$  tenga el mismo valor<sup>2</sup>, es decir  $\Psi(\phi) = \Psi(\phi + 2\pi)$

Volviendo a reorganizar la ecuación homogénea y multiplicando por:

$$\frac{R(\rho)}{\rho^2}$$

Tenemos:

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \rho^2 (\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) = m^2 \quad (1.19)$$

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) + \left( (\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) - \left( \frac{m}{\rho} \right)^2 \right) R(\rho) = 0 \quad (1.20)$$

---

<sup>2</sup>En este trabajo solo trabajaremos con valores enteros de  $m$

Agrupando <sup>3</sup>

$$\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon = K_c^2$$

Llegamos a una expresión conocida

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) + K_c^2 \left( 1 - \left( \frac{m}{K_c \rho} \right)^2 \right) R(\rho) = 0 \quad (1.21)$$

Esta expresión es una ecuación diferencial de Bessel, Ésta es la ecuación para las funciones cilíndricas de orden  $m$  en la variable  $K_c \rho$ , en donde el conjunto de soluciones linealmente independientes para una región limitada por paredes cilíndricas conductoras, están formadas por las funciones de Bessel de primera especie,  $J_m(K_c \rho)$  y Neumann o de Bessel de segunda especie  $Y_m(K_c \rho)$ . El desarrollo de la solución general a esta ecuación, al igual que su desarrollo está recogida en una gran variedad de bibliografía especializada sobre propagación de campos electromagnéticos en recintos cerrados. En este proyecto únicamente presentamos la solución propuesta. Recordando que:

$$F(\rho, \phi, z) \equiv R(\rho) \Psi(\phi) Z(z)$$

Entonces<sup>4</sup>

$$F(\rho, \phi, z) = \left( A J_m(K_c \rho) + B Y_m(K_c \rho) \right) \left( D \sin(m\phi) + E \cos(m\phi) \right) \left( e^{\pm \gamma z} \right) \quad (1.22)$$

Ahora bien, si obviamos la función en  $Z$  nos quedamos con una expresión mas simplificada.

$$F(\rho, \phi) = \left( A J_m(K_c \rho) + B Y_m(K_c \rho) \right) \left( D \cos(m\phi) + E \sin(m\phi) \right) \quad (1.23)$$

---

<sup>3</sup>El término  $K_c^2$ , el número de onda de corte, este término es de gran relevancia y podemos adelantar que adopta valores reales o imaginarios. En función de estos valores se producirá la propagación o no en el interior de la guía, mas tarde detallaremos los aspectos relevantes de este término.

<sup>4</sup>Se ha omitido la dependencia temporal para facilitar la interpretación de la expresión.

## 1.2. Propagación Electromagnética en una Guía de ondas Genérica

Si consideramos una guía de ondas como una regione limitada por paredes conductoras paralelas a la dirección de propagación, de sección transversal uniforme<sup>5</sup> y de un solo conductor, estaremos en el caso de una guía cilíndrica hueca, por tanto a los sistemas de guiado de ondas con dos o más conductores y con las mismas características que las primeras, serán definidas como líneas de transmisión. Para ser más estrictos con estas últimas, las llamaremos guía de ondas coaxiales.

Para el estudio de la propagación de ondas en el interior de los sistemas mencionados vamos a representar las ecuaciones de Maxwell en la forma armónica compleja en el tiempo.

Empezamos con las expresiones de los campos:

$$\mathbf{E}^{\pm}(\rho, \phi, z, t) = \Re\{\mathcal{E}^{\pm}(\rho, \phi) \cdot e^{j\omega t \pm \gamma z}\}$$

$$\mathbf{H}^{\pm}(\rho, \phi, z, t) = \Re\{\mathcal{H}^{\pm}(\rho, \phi) \cdot e^{j\omega t \pm \gamma z}\}$$

Para la ecuación de onda.

$$\nabla \times \mathcal{E}^{\pm}(\rho, \phi) e^{j\omega t \pm \gamma z} = -j\omega\mu \mathcal{H}^{\pm}(\rho, \phi) \cdot e^{j\omega t \pm \gamma z}$$

$$\nabla \times \mathcal{H}^{\pm}(\rho, \phi) e^{j\omega t \pm \gamma z} = j\omega\varepsilon \mathcal{E}^{\pm}(\rho, \phi) \cdot e^{j\omega t \pm \gamma z}$$

Presentamos el Laplaciano modificado como:

$$\nabla_t^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

---

<sup>5</sup>En este trabajo se considera las paredes perfectamente conductoras, es decir que no se consideran las pérdidas en las mismas

Recordando que  $\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \gamma^2$ . Presentamos las expresiones escalares de los campos en forma matricial:

$$\nabla \times \mathcal{E}^\pm(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{u_\rho}{\rho} & u_\phi & \frac{u_z}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial_\rho} & \frac{\partial}{\partial_\phi} & \pm\gamma \\ \mathcal{H}_\rho^\pm(\rho, \phi) & \rho\mathcal{H}_\phi^\pm(\rho, \phi) & \mathcal{H}_z^\pm(\rho, \phi) \end{pmatrix} = -j\omega\mu\mathcal{H}^\pm(\rho, \phi)$$

Si desarrollamos el rotacional e igualamos los términos escalares, tanto para las componentes del campo eléctrico como el magnético, llegaremos a las siguientes ecuaciones, en donde se ha mantenido la dependencia de las expresiones con el tiempo.

$$\left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial_\phi} \mathcal{E}_z^\pm(\rho, \phi) - \pm\gamma \mathcal{E}_\phi^\pm(\rho, \phi) \right\} e^{j\omega t \pm \gamma z} = -j\omega\mu\mathcal{H}_\rho^\pm(\rho, \phi) e^{j\omega t \pm \gamma z} \quad (1.24)$$

$$\left\{ \pm\gamma \mathcal{E}_\phi^\pm(\rho, \phi) - \frac{\partial}{\partial_\rho} \mathcal{E}_z^\pm(\rho, \phi) \right\} e^{j\omega t \pm \gamma z} = -j\omega\mu\mathcal{H}_\phi^\pm(\rho, \phi) e^{j\omega t \pm \gamma z} \quad (1.25)$$

$$\left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial_\rho} \rho \mathcal{E}_\phi^\pm(\rho, \phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial_\phi} \mathcal{E}_\rho^\pm(\rho, \phi) \right\} e^{j\omega t \pm \gamma z} = -j\omega\mu\mathcal{H}_z^\pm(\rho, \phi) e^{j\omega t \pm \gamma z} \quad (1.26)$$

$$\left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial_\phi} \mathcal{H}_z^\pm(\rho, \phi) - \pm\gamma \mathcal{H}_\phi^\pm(\rho, \phi) \right\} e^{j\omega t \pm \gamma z} = j\omega\varepsilon\mathcal{E}_\rho^\pm(\rho, \phi) e^{j\omega t \pm \gamma z} \quad (1.27)$$

$$\left\{ \pm\gamma \mathcal{H}_\rho^\pm(\rho, \phi) - \frac{\partial}{\partial_\rho} \mathcal{H}_z^\pm(\rho, \phi) \right\} e^{j\omega t \pm \gamma z} = j\omega\varepsilon\mathcal{E}_\phi^\pm(\rho, \phi) e^{j\omega t \pm \gamma z} \quad (1.28)$$

$$\left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial_\rho} \rho \mathcal{H}_\phi^\pm(\rho, \phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial_\phi} \mathcal{E}_\rho^\pm(\rho, \phi) \right\} e^{j\omega t \pm \gamma z} = j\omega\varepsilon\mathcal{E}_z^\pm(\rho, \phi) e^{j\omega t \pm \gamma z} \quad (1.29)$$

Si analizamos en profundidad este sistema de ecuaciones encontramos que podemos expresar las componentes transversales de los campos en función de las derivadas parciales de las componentes longitudinales. Es así que manipulamos estas expresiones para encontrar el siguiente sistema de ecuaciones (se ha omitido los exponenciales para una mejor interpretación).

De las expresiones 1.25 y 1.27

$$\mathcal{E}_\rho^\pm(\rho, \phi) = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon} \left\{ -\frac{j\omega\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial_\phi} \mathcal{H}_z^\pm(\rho, \phi) + \gamma \frac{\partial}{\partial_\rho} \mathcal{E}_z^\pm(\rho, \phi) \right\} \quad (1.30)$$

De las expresiones 1.28 y 1.24

$$\mathcal{E}_\phi^\pm(\rho, \phi) = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon} \left\{ j\omega \mu \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{H}_z^\pm(\rho, \phi) + \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{E}_z^\pm(\rho, \phi) \right\} \quad (1.31)$$

De las expresiones 1.24 y 1.28

$$\mathcal{H}_\rho^\pm(\rho, \phi) = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon} \left\{ \frac{j\omega \varepsilon}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{E}_z^\pm(\rho, \phi) + \gamma \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{H}_z^\pm(\rho, \phi) \right\} \quad (1.32)$$

Finalmente de 1.25 y 1.27

$$\mathcal{H}_\phi^\pm(\rho, \phi) = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon} \left\{ \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{H}_z^\pm(\rho, \phi) - j\omega \varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{E}_z^\pm(\rho, \phi) \right\} \quad (1.33)$$

Estas ecuaciones nos permiten encontrar las componentes de los campos transversales en una guía de ondas cilíndrica siempre que se conozcan las componentes longitudinales, o al menos una de ellas.

También constituyen una base para la descripción de los campos en clases o Modos propagantes, existentes en el interior de la guía.

En cuanto a la solución propuesta en 1.23, su estructura variará según el tipo de guía (cilíndrica, coaxial), y de sus respectivas condiciones de contorno.

### 1.3. Teoría de Modos

A continuación vamos a clasificar los campos en función de la componente longitudinal que se encuentre presente y de la estructura básica de la guía en la que se produce la propagación.

Si centramos nuestra atención en las expresiones: 1.30, 1.31, 1.32 y 1.33 podemos observar que solo será necesario la presencia de una componente longitudinal para, a partir de ésta, obtener las restantes y poder determinar los modos existentes en el interior de la guía.

Así pues, en función de la componente de campo que se disponga se definirá un tipo de modo u otro. A esta primera condición se le añade otra, el de tipo estructura sobre la que estamos trabajando, es decir si el medio es un a guía coaxial o una guía cilíndrica.

Basándonos en estas condicionantes podemos mencionar la siguiente clasificación

**Modos transversales Eléctricos**  $\Rightarrow$  TE  $\rightarrow$  donde  $\mathcal{E}_z^\pm(\rho, \phi) = 0$

**Modos transversales Magnéticos**  $\Rightarrow$  TM  $\rightarrow$  donde  $\mathcal{H}_z^\pm(\rho, \phi) = 0$

**Modos transversales Electromagnéticos**  $\Rightarrow$  TEM  $\rightarrow$  en donde se ha de cumplir a la vez que  $\mathcal{E}_z^\pm(\rho, \phi) = 0$  y  $\mathcal{H}_z^\pm(\rho, \phi) = 0$ .

De forma general las guías de ondas de un solo conductor pueden propagar los modos *TE* y *TM*. Los sistemas de dos conductores como las guías coaxiales propagan los tres tipos de modos: *TE*, *TM* y *TEM*.

### 1.3.1. Condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno sobre una guía cilíndrica de paredes conductoras ideales, son la nulidad de la componente tangencial del campo eléctrico y de la normal del campo magnético, es decir:  $\vec{u}\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$  y  $\vec{u}\vec{n} \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$ , respectivamente. Ahora bien, en el interior del conductor ideal se cumple que  $\vec{E}_1 = \vec{H}_1 = 0$ . Por otro lado, el vector  $\vec{u}\vec{n} = \vec{u}\vec{\rho}$ , es un vector perpendicular a la superficie del conductor, por lo que al final resulta:

$$\vec{u}\vec{\rho} \times \vec{E}_2 = 0 \quad (1.34)$$

$$\vec{u}\vec{\rho} \cdot \vec{H}_2 = 0 \quad (1.35)$$

## 1.4. Modos Transversales Eléctricos y soluciones.

Los modos *TE* y los *TM* tienen la peculiaridad de que su propagación es posible en las líneas de transmisión de un sólo conductor, es decir en una estructura como la que presentamos en 1.4:

Vamos a describir un análisis de las soluciones del modo *TE* en guías de ondas cilíndricas. Antes hemos de suponer, como en todo este trabajo, que las paredes de la guía son conductoras perfectas. Analíticamente los modos transversales eléctricos TE u Ondas Transversales, las encontramos cuando la expresión de la componente longitudinal del campo eléctrico se hace nula. En efecto,  $\mathcal{E}_z^\pm(\rho, \phi) = 0$ , por tanto del conjunto de ecuaciones: 1.30, 1.31, 1.32, 1.33 se

reducen a:<sup>6</sup>

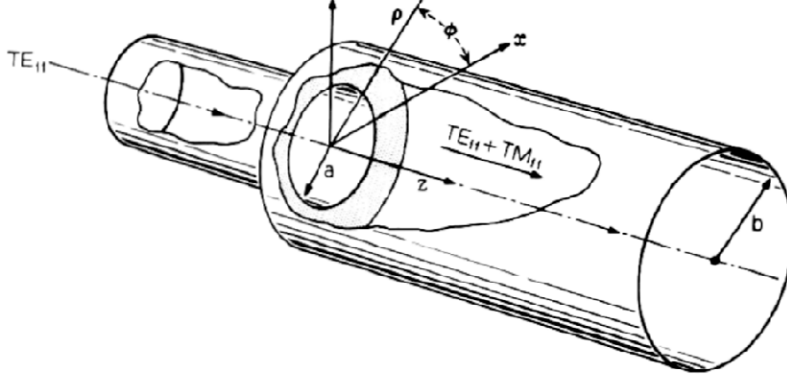


Figura 1.1: Cilindro con discontinuidad.

$$\mathcal{E}_\rho(\rho, \phi) = \frac{1}{K_c^2} \frac{-j\omega\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{H}_z(\rho, \phi) \quad (1.36)$$

$$\mathcal{E}_\phi(\rho, \phi) = \frac{1}{K_c^2} j\omega\mu \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{H}_z(\rho, \phi) \quad (1.37)$$

$$\mathcal{H}_\rho(\rho, \phi) = \frac{1}{K_c^2} \gamma \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{H}_z(\rho, \phi) \quad (1.38)$$

$$\mathcal{H}_\phi(\rho, \phi) = \frac{1}{K_c^2} \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{H}_z(\rho, \phi) \quad (1.39)$$

Donde se aprecia, que solo es necesario conocer una componente longitudinal para obtener las cinco restantes, logrando así resolver el sistema de ecuaciones necesario para describir los Modos Transversales Eléctricos, objeto de este apartado.

Si retomamos la definición de la solución general, presentada en 1.23, tomando en cuenta que ahora se presenta en función de la componente de campo

<sup>6</sup>Hemos definido anteriormente  $\gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon = K_c^2$ , en adelante solo se considerara la onda propagándose en el sentido positivo del eje axial  $z$ .



longitudinal  $H_z(\rho, \phi)$ . Así obtendríamos:

$$H_z(\rho, \phi) = \left( A J_m(K_c \rho) + B Y_m(K_c \rho) \right) \left( D \cos(m\phi) + E \sin(m\phi) \right) \quad (1.40)$$

Si intentamos desarrollar esta expresión aplicando a nuestra estructura cilíndrica sin conductor interno, enseguida encontramos que la solución para  $\rho = 0$ , no es posible ya que no tenemos radio interior, por tanto no hay una solución física posible. Es decir, nos encontramos con:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} Y_m(K_c \rho) \simeq -\infty \quad (1.41)$$

Que representa una singularidad en el origen, por tanto  $B = 0$ . En cuanto al coeficiente de amplitud  $A$ , en siguientes capítulos dedicaremos un estudio extenso al análisis de estos coeficientes que representaremos con  $a_i$ , que en general son coeficientes complejos. Si aplicamos esta limitación en la solución, tenemos:

$$H_z(\rho, \phi) = J_m(K_C \rho) \left( D \cos(m\phi) + E \sin(m\phi) \right) \quad (1.42)$$

Aplicando las condiciones de contorno sobre la superficie conductora definida en 1.34, necesitamos que  $\vec{u}_{\vec{\rho}} \cdot \nabla H = 0$ , es decir  $\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \big|_{\rho=a} = 0$ .

En definitiva:

$$J'_m(K_C a) = 0 \quad (1.43)$$

Podemos encontrar un conjunto infinito de valores en los que  $K_c a$  cumplen con este requerimiento. Si denominamos éstas con  $q'_{mn}$  podemos decir que cada raíz pertenece al  $n$ -ésimo cero de la derivada de la función de Bessel de  $m$ -ésimo orden.

Si analizamos el argumento de la ecuación y lo igualamos con las raíces, hallamos:

$$K_{C_{TE}}^{mn} = \frac{q'_{mn}}{a} \quad (1.44)$$

Donde el término  $K_{C_{TE}}^{mn}$  se define como el número de onda de corte perteneciente al modo  $TE$  y  $a$  es el radio de la guía. Para cada valor se asocia un único modo de propagación. Ahora si generalizamos la constante de propagación  $\gamma$  tenemos:

$$\gamma_{TE}^{mn} = \sqrt{(K_{C_{TE}}^{mn})^2 - k^2} \quad (1.45)$$

Para que se produzca la propagación esta claro que, por 1.13 el término  $\gamma_{TE}^{mn}$  ha de ser imaginario y positivo. De lo que se deduce que:  $k > K_{C_{TE}}^{mn}$ , siendo  $k$

el número de onda de propagación en el interior de la guía a una frecuencia de trabajo específica. Es decir que la frecuencia de trabajo ha de estar por encima de la frecuencia de corte.

Entonces la longitud de onda de corte será:

$$\lambda_{C_{TE}}^{mn} = \frac{2\pi}{K_{C_{TE}}^{mn}} \quad (1.46)$$

y la longitud de onda en el interior de la guía:

$$\lambda_{g_{TE}}^{mn} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{C_{TE}}^{mn}}\right)^2}} \quad (1.47)$$

En este sentido la constante de fase se define como  $j\beta_{g_{TE}}^{mn} = j\frac{2\pi}{\lambda_{g_{TE}}^{mn}} = \gamma_{TE}^{mn}$ .

Una vez tomadas en cuenta estas consideraciones, podemos presentar el conjunto de ecuaciones por las que se rigen los Modos Transversales Eléctricos.

$$H_z(\rho, \phi) = J_m\left(\frac{q'_{mn}}{a}\rho\right)\left(\cos(m\phi) + \sin(m\phi)\right) \quad (1.48)$$

$$E_\rho(\rho, \phi) = \frac{1}{K_{C_{TE}}^{mn/2}} \frac{-j\omega\mu}{\rho} m J_m\left(\frac{q'_{mn}}{a}\rho\right)\left(\cos(m\phi) - \sin(m\phi)\right) \quad (1.49)$$

$$E_\phi(\rho, \phi) = \frac{1}{K_{C_{TE}}^{mn/2}} j\omega\mu J'_m\left(\frac{q'_{mn}}{a}\rho\right)\left(\cos(m\phi) + \sin(m\phi)\right) \quad (1.50)$$

$$H_\rho(\rho, \phi) = \frac{j\beta_{g_{TE}}^{mn}}{K_{C_{TE}}^{mn/2}} J'_m\left(\frac{q'_{mn}}{a}\rho\right)\left(\cos(m\phi) + \sin(m\phi)\right) \quad (1.51)$$

$$H_\phi(\rho, \phi) = \frac{j\beta_g^{mn}}{K_{C_{TE}}^{mn/2}} \frac{m}{\rho} J_m\left(\frac{q'_{mn}}{a}\rho\right)\left(\cos(m\phi) - \sin(m\phi)\right) \quad (1.52)$$

En donde

$$J'_m\left(\frac{q'_{mn}}{a}\rho\right) = \frac{m}{\rho} J_m\left(\frac{q'_{mn}}{a}\rho\right) - \frac{q'_{mn}}{a} J_{m+1}\left(\frac{q'_{mn}}{a}\rho\right)$$

## 1.5. Modos Transversales Magnéticos y sus soluciones.

La figura de análisis es la misma que para los modos  $TE$  y existen analogías en cuanto al desarrollo se refiere, empezamos nuevamente con las expresiones: 1.30, 1.31, 1.32 y 1.33 y con la eliminación de la componente respectiva  $\mathcal{H}_z^\pm(\rho, \phi) = 0$ , tenemos:

$$\mathcal{E}_\rho(\rho, \phi) = \frac{1}{K_c^2} \gamma \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{E}_z(\rho, \phi) \quad (1.53)$$

$$\mathcal{E}_\phi(\rho, \phi) = \frac{1}{K_c^2} \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{E}_z(\rho, \phi) \quad (1.54)$$

$$\mathcal{H}_\rho(\rho, \phi) = \frac{1}{K_c^2} \frac{j\omega\varepsilon}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{E}_z(\rho, \phi) \quad (1.55)$$

$$\mathcal{H}_\phi(\rho, \phi) = \frac{-1}{K_c^2} j\omega\varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{E}_z(\rho, \phi) \quad (1.56)$$

Si partimos de la solución general planteada en 1.23, solo que en este caso la denominaremos componente longitudinal del Campo Eléctrico ( $E_z(\rho, \phi)$ ), obtendremos:

$$E_z(\rho, \phi) = J_m(K_c \rho) \left( D \cos(m\phi) + E \sin(m\phi) \right) \quad (1.57)$$

Si nos referimos a las condiciones de contorno reflejada en 1.35, donde se ha

de cumplir que  $E_z(\rho, \phi) = 0$ , y si mantenemos la característica de simetría de revolución alrededor del eje axial entonces se debe cumplir que:

$$J_m(K_C \rho) = 0 \quad (1.58)$$

De la misma manera existe un conjunto infinito de valores que permiten esta igualdad. Si definimos las raíces como  $p_{mn}$ , resultará:

$$K_{CTM}^{mn} = \frac{p_{mn}}{a} \quad (1.59)$$

Donde cada raíz pertenece al  $n$ -ésimo cero de la función de Bessel de  $m$ -ésimo orden. El término  $K_{CTM}^{mn}$  es el número de onda de corte del modo  $TM$  y  $a$  es el radio de la guía.

La longitud de onda de corte es:

$$\lambda_{CTM}^{mn} = \frac{2\pi}{K_{CTM}^{mn}} \quad (1.60)$$

La longitud de onda de propagación es:

$$\lambda_{gTM}^{mn} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{CTM}^{mn}}\right)^2}} \quad (1.61)$$

y la constante de fase es:

$$\beta_{gTM}^{mn} = \frac{2\pi}{\lambda_{gTM}^{mn}} \quad (1.62)$$

Por lo que las ecuaciones halladas son:

$$E_z(\rho, \phi) = J_m\left(\frac{P_{mn}}{a}\rho\right)\left(\cos(m\phi) + \sin(m\phi)\right) \quad (1.63)$$

$$H_\rho(\rho, \phi) = \frac{1}{K_{CTM}^{mn/2}} \frac{j\omega\varepsilon}{\rho} m J_m\left(\frac{P_{mn}}{a}\rho\right)\left(\cos(m\phi) - \sin(m\phi)\right) \quad (1.64)$$

$$H_\phi(\rho, \phi) = \frac{-1}{K_{CTE}^{mn/2}} j\omega\varepsilon J'_m\left(\frac{P_{mn}}{a}\rho\right)\left(\cos(m\phi) + \sin(m\phi)\right) \quad (1.65)$$

$$E_\rho(\rho, \phi) = \frac{j\beta_{gTM}^{mn}}{K_{CTM}^{mn/2}} J'_m\left(\frac{P_{mn}}{a}\rho\right)\left(\cos(m\phi) + \sin(m\phi)\right) \quad (1.66)$$

$$E_\phi(\rho, \phi) = \frac{j\beta_{g_{TM}}^{mn}}{K_{C_{TM}}^{\frac{mn}{2}}} \frac{m}{\rho} J_m\left(\frac{P_{mn}}{a}\rho\right) \left(\cos(m\phi) - \sin(m\phi)\right) \quad (1.67)$$

Donde

$$J'_m\left(\frac{P_{mn}}{a}\rho\right) = \frac{m}{\rho} J_m\left(\frac{P_{mn}}{a}\rho\right) - \frac{P_{mn}}{a} J_{m+1}\left(\frac{P_{mn}}{a}\rho\right)$$



## Capítulo 2

# Método de Adaptación Modal

### 2.1. Fundamentos Teóricos

Cuando empezamos a trabajar en frecuencias por encima de las bandas  $k_u$  la dificultad para trabajar con elementos pasivos se hace evidente en cuanto que éstos se hacen cada vez más pequeños. Por tanto, muchas de las técnicas de análisis han de mejorarse. Como ejemplo de esta situación son las técnicas avanzadas de transformación integral [3], o aproximaciones cuasiestáticas [4]. En la misma línea en 1966, Clarricoats y Slinn formularon un nuevo método numérico que utilizaban para caracterizar obstáculos y construir novedosos instrumentos de medida sobre guías de onda rectangulares [5].

Si hacemos referencia al tiempo de cálculo que se emplea en el análisis, diseño y simulación de sistemas pasivos de microondas realizados en tecnología de guía ondas, se concluirá que éste es un parámetro con mucha relevancia a la que se ha de dar especial interés. Cualquier algoritmo empleado en la simulación de estructuras de microondas que se sostiene en algún programa software ha de caracterizar de forma completa el comportamiento electromagnético y ser lo suficientemente rápido en el tiempo para que en función de los resultados que se vayan obteniendo ir adoptando decisiones establecidas o concluidas según se desarrolla el proceso. Esta característica la aborda Wexler, que hacía énfasis en el desarrollo conveniente de la formulación para economizar y ahorrar períodos de cálculo en los procesadores[6].

### 2.2. Desarrollo del Método

En este capítulo, vamos a realizar el análisis matemático en el que se detalla el método por el cual se describe el comportamiento de los modos en presen-

cia de una perturbación transversal en la guía de ondas. El método conocido como el Método del Análisis Modal consiste en la descomposición modal de los campos electromagnéticos en el interior de la antena y el cálculo de la matriz general de dispersión (Scattering), para finalmente obtener la matriz de parámetros  $S$ .

Recordemos que la antena se caracteriza por cilindros axiales que se interconectan uno a continuación de otro, con la diferencia que el diámetro del segundo está incrementado. La estructura inicial es la figura 2.2.

Esta figura representa el corte transversal de una parte de la antena. Se aprecian tres superficies:

$S_0$  Superficie transversal situada en la intersección de los dos cilindros.

$S_1$  Superficie transversal perteneciente al cilindro de entrada.

$S_2$  Superficie transversal perteneciente al cilindro de salida.

En donde  $S_1 = S_0$ .

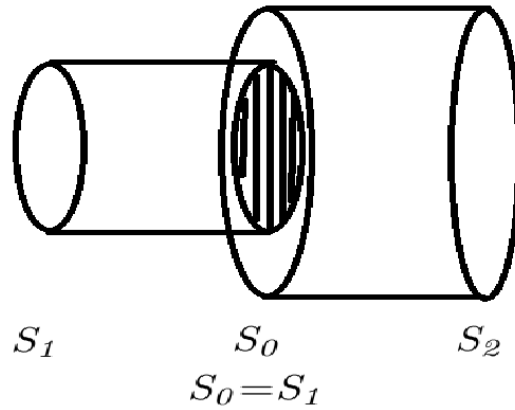


Figura 2.1: Primera discontinuidad.

La figura anterior se puede representar mediante un cuadripolo en donde la discontinuidad queda caracterizada por los parámetros  $S$ , es decir,  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{21}$ ,  $S_{22}$ . Un inciso, si sólo se alimenta, el cuadripolo, con un tono a la entrada entonces los términos de parámetros serán uno solo, pero por lo general se alimentan mediante varios tonos a la entrada por lo que al final cada término se convertirá en matriz. Obteniendo una matriz de dispersión (Scattering) formada por submatrices.



### 2.2.1. Expresiones de los campos en la discontinuidad

Si definimos el plano que contiene la discontinuidad como el plano  $z = 0$ , entonces los planos a la izquierda serán denominados planos  $-z$  (*Negativos*), y los de la derecha  $+z$  (*Positivos*). En relación a los campos, los existentes o provenientes de la puerta 1 inciden en la discontinuidad y algunos se transmiten hacia la puerta 2 en tanto que otra parte restante se refleja hacia la puerta de entrada. El mismo efecto se produce con los campos provenientes de la puerta 2, algunos se transmiten hacia la puerta 1 mientras que parte se reflejan. Para encontrar el campo total en el interior de la guía podemos aplicar el Teorema de superposición. Es así que tenemos una suma infinita de campos ponderados por un coeficiente en amplitud y en fase. Se ha de mencionar que los términos de los campos propios de la guía han de estar normalizados. Es así que, tanto para los campos magnéticos como eléctricos presentamos las siguientes expresiones:

Para la guía de entrada

$$\vec{E}_{inc}^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(1)} \cdot \vec{e}_i^{(1)} \cdot e^{-\gamma_i^{(1)} z} \quad \forall P \in S_1 \quad (2.1)$$

$$\vec{H}_{inc}^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(1)} \cdot \vec{h}_i^{(1)} \cdot e^{-\gamma_i^{(1)} z} \quad \forall P \in S_1 \quad (2.2)$$

$$\vec{E}_r^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(1)} \cdot \vec{e}_i^{(1)} \cdot e^{+\gamma_i^{(1)} z} \quad \forall P \in S_1 \quad (2.3)$$

$$\vec{H}_r^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(1)} \cdot \vec{h}_i^{(1)} \cdot e^{+\gamma_i^{(1)} z} \quad \forall P \in S_1 \quad (2.4)$$

Para la guía de salida

$$\vec{E}_{inc}^{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(2)} \cdot \vec{e}_j^{(2)} \cdot e^{+\gamma_j^{(2)} z} \quad \forall P \in S_2 \quad (2.5)$$

$$\vec{H}_{inc}^{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(2)} \cdot \vec{h}_j^{(2)} \cdot e^{+\gamma_j^{(2)} z} \quad \forall P \in S_2 \quad (2.6)$$

$$\vec{E}_r^{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} b_j^{(2)} \cdot \vec{e}_j^{(2)} \cdot e^{-\gamma_j^{(2)} z} \quad \forall P \in S_2 \quad (2.7)$$

$$\vec{H}_r^{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} b_j^{(2)} \cdot \vec{h}_j^{(2)} \cdot e^{-\gamma_j^{(2)} z} \quad \forall P \in S_2 \quad (2.8)$$

Donde:

$a_i^{(1)}, a_j^{(2)}$  Son las amplitudes complejas de los modos  $i$  y  $j$  incidentes en la discontinuidad desde las guías 1 y 2, respectivamente.

$b_i^{(1)}, b_j^{(2)}$  Son las amplitudes complejas de los modos  $i$  y  $j$  incidentes en la discontinuidad desde las guías 1 y 2, respectivamente.

$\gamma_i^{(1)}, \gamma_j^{(2)}$  Son las constantes de propagación de los modos  $i$  y  $j$  en las guías 1 y 2, respectivamente.

$\vec{e}_i^{(1)}, \vec{e}_j^{(2)}$  Son los campos eléctricos transversales de los modos propios  $i$  y  $j$  de las guías 1 y 2, respectivamente.

$\vec{h}_i^{(1)}, \vec{h}_j^{(2)}$  Son los campos magnéticos transversales de los modos propios  $i$  y  $j$  de las guías 1 y 2, respectivamente.

Los campos transversales en el plano  $z = 0$  se pueden formular como:

$$\vec{E}_t^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \left( a_i^{(1)} + b_i^{(1)} \right) \cdot \vec{e}_i^{(1)} \quad \forall P \in S_1 \quad (2.9)$$

$$\vec{H}_t^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \left( a_i^{(1)} - b_i^{(1)} \right) \cdot \vec{h}_i^{(1)} \quad \forall P \in S_1 \quad (2.10)$$

$$\vec{E}_t^{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left( a_j^{(2)} + b_j^{(2)} \right) \cdot \vec{e}_j^{(2)} \quad \forall P \in S_2 \quad (2.11)$$

$$\vec{H}_t^{(2)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left( -a_j^{(2)} + b_j^{(2)} \right) \cdot \vec{h}_j^{(2)} \quad \forall P \in S_2 \quad (2.12)$$

### 2.2.2. Condiciones de contorno en la discontinuidad

Para encontrar los coeficientes  $a_i^{(1)}, b_i^{(1)}, a_j^{(2)}, b_j^{(2)}$  hemos de imponer las condiciones de continuidad de los campos electromagnéticos en la interacción de dos medios. Tenemos para el campo eléctrico:

$$\vec{E}_t^{(1)} = \vec{E}_t^{(2)} \quad \forall P \in S_0 \quad (2.13)$$

En la discontinuidad no existe fuentes ni cargas por lo que:

$$\vec{H}_t^{(1)} = \vec{H}_t^{(2)} \quad \forall P \in S_0 \quad (2.14)$$

La superficie  $S_2$  esta compuesta por la superficie  $S_0$  y una parte de conductor perfecto, por tanto si aplicamos el desvanecimiento de los campos en el interior de un conductor, tenemos:

$$\vec{E}_t^{(1)} = 0 \quad \forall P \in S_1 - S_0 \quad (2.15)$$

$$\vec{E}_t^{(2)} = 0 \quad \forall P \in S_2 - S_0 \quad (2.16)$$

Al aplicar las condiciones de contorno, los campos eléctricos transversales en la discontinuidad se redefinen como una serie de autovalores multiplicados por unos coeficientes incógnitas. Los autovalores serán las expresiones de los campos eléctricos transversales de los modos en la superficie de la discontinuidad. Con esta nueva definición del campo se introducen nuevas incógnitas, pero a su vez se compensa porque también se introducen nuevas ecuaciones.

$$\vec{E}_t^{(0)} = \sum_{l=1}^{\infty} c_l \vec{e}_l^{(0)} \quad \forall P \in S_0 \quad (2.17)$$

Utilizando la expresión 2.17 y 2.13 podemos obtener las mencionadas ecuaciones:

$$\vec{E}_t^{(1)} = \vec{E}_t^{(0)} \quad \forall P \in S_0 \quad (2.18)$$

$$\vec{E}_t^{(0)} = \vec{E}_t^{(2)} \quad \forall P \in S_0 \quad (2.19)$$

### 2.2.3. Propiedad de Ortogonalidad de los Campos

En toda guía onda, cuyo eje coincide con la coordenada  $z$ , y de longitud teóricamente infinita, la forma general de los campos corresponde a una superposición de modos de propagación que se obtienen por solución de las ecuaciones de Maxwell, con las condiciones de contorno impuestas por las paredes de la guía.

Estos modos forman un conjunto ortogonal, lo que significa que cada uno de ellos puede propagarse por separado, sin mezclarse o interferir con otros.

Sin embargo, tan pronto como se introduzca cualquier perturbación en la guía, un incremento del radio de salida, como es nuestro caso, la uniformidad desaparece. Las nuevas condiciones de contorno solo pueden ser satisfechas por una combinación lineal de modos, a menudo en número infinito. Esto quiere decir que toda perturbación produce un acoplamiento entre modos, o bien crea nuevos modos en su entorno.

Por tanto la propiedad de ortogonalidad, que los modos han de cumplir, se define de la siguiente forma[7]:

$$\int_{s_g} \vec{e}_i^{(g)} \times \vec{h}_j^{(g)} \cdot d\vec{s}_g = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \Delta_i^g & i = j \end{cases} \quad (2.20)$$

## 2.3. Discontinuidad Radio Menor-Radio Mayor

Vamos a presentar el procedimiento con el que se aplica el método en una discontinuidad en la forma más general. En las siguientes secciones se particularizará a una discontinuidad de forma geométrica dada. Hasta ahora hemos presentado las expresiones de los campos y el comportamiento respecto a las condiciones de contorno. A continuación desarrollaremos las ecuaciones presentadas empleando la forma modal de los campos que en cada momento intervienen. Tenemos tres ecuaciones a desarrollar:

### 2.3.1. Primera ecuación

De la expresión 2.18 que define la continuidad de los campos eléctricos transversales en la guía 1, desarrollando ésta y utilizando 2.17, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( a_i^{(1)} + b_i^{(1)} \right) \cdot \vec{e}_i^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} c_l^{(0)} \vec{e}_l^{(0)} \quad (2.21)$$

Si multiplicamos vectorialmente los términos de esta igualdad por el campo magnético transversal de un modo arbitrario  $n$ <sup>1</sup> de la primera guía e integrando sobre la superficie de la discontinuidad llegamos a:

$$\int_{s_0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left( a_i^{(1)} + b_i^{(1)} \right) \cdot \vec{e}_i^{(1)} \right\} \times \vec{h}_n^{(1)} \cdot d\vec{s} = \int_{s_0} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} c_l^{(0)} \vec{e}_l^{(0)} \right\} \times \vec{h}_n^{(1)} \cdot d\vec{s} \quad (2.22)$$

Aplicando la condición de contorno en conductores perfectos, la integral del término de la derecha se puede aplicar a la superficie de la guía 1, en este mismo sentido, si consideramos la propiedad de ortogonalidad de los modos 2.20, es posible eliminar el sumatorio del mismo término de la derecha.

---

<sup>1</sup>En donde  $n=1, 2, 3 \dots$

$$\left(a_n^{(1)} + b_n^{(1)}\right) \cdot \int_{s_1} \vec{e}_n^{(1)} \times \vec{h}_n^{(1)} \cdot \vec{ds} = \sum_{l=1}^{\infty} c_l^{(0)} \cdot \int_{s_0} \vec{e}_l^{(0)} \times \vec{h}_n^{(1)} \cdot \vec{ds} \quad (2.23)$$

Ahora bien, para simplificar las expresiones hacemos:

$$\Delta_i^{(g)} = \int_{s_g} \vec{e}_i^{(g)} \times \vec{h}_i^{(g)} \cdot \vec{ds}_g \quad (2.24)$$

$$X_i^{(g)} = \int_{s_0} \vec{e}_i^{(0)} \times \vec{h}_j^{(g)} \cdot \vec{ds} \quad (2.25)$$

Por lo que finalmente podemos presentar la primera ecuación en la forma más simplificada:

$$\left(a_n^{(1)} + b_n^{(1)}\right) \cdot \Delta_n^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} c_l^{(0)} \cdot X_{ln}^{(1)} \quad (2.26)$$

### 2.3.2. Segunda ecuación

Así mismo, para la guía 2, tomando la expresión 2.19, que hace referencia a la continuidad de los campos eléctricos transversales y desarrollándola en su forma modal, tenemos:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j^{(2)} + b_j^{(2)}\right) \cdot \vec{e}_j^{(2)} = \sum_{l=1}^{\infty} c_l^{(0)} \vec{e}_l^{(0)} \quad (2.27)$$

Multiplicamos esta expresión vectorialmente por el campo magnético transversal de un modo arbitrario  $m^2$  de la segunda guía e integrando sobre la superficie de la discontinuidad se llega a:

$$\int_{s_0} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j^{(2)} + b_j^{(2)}\right) \cdot \vec{e}_j^{(2)} \right\} \times \vec{h}_m^{(2)} \cdot \vec{ds} = \int_{s_0} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} c_l^{(0)} \cdot \vec{e}_l^{(0)} \right\} \times \vec{h}_m^{(2)} \cdot \vec{ds} \quad (2.28)$$

Si se aplica la condición de contorno 2.15, la integral del primer término se puede ampliar a toda la superficie de la guía 2. Y considerando la propiedad de ortogonalidad de los modos 2.20, es posible eliminar el sumatorio del término de la derecha en la expresión anterior.

$$\left(a_m^{(2)} + b_m^{(2)}\right) \cdot \int_{s_2} \vec{e}_m^{(2)} \times \vec{h}_m^{(2)} \cdot \vec{ds} = \sum_{l=1}^{\infty} c_l^{(0)} \cdot \int_{s_0} \vec{e}_l^{(0)} \times \vec{h}_m^{(2)} \cdot \vec{ds} \quad (2.29)$$

---

<sup>2</sup>En donde  $m=1, 2, 3...$

Si utilizamos las expresiones 2.24 y 2.25, podemos simplificar la igualdad anterior, es así que tenemos:

$$\left(a_m^{(2)} + b_m^{(2)}\right) \cdot \Delta_m^{(2)} = \sum_{l=1}^{\infty} c_l^{(0)} \cdot X_{lm}^{(2)} \quad (2.30)$$

### 2.3.3. Tercera ecuación

En esta última expresión vamos a partir de la ecuación de continuidad de los campos magnéticos transversales

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i^{(1)} + b_i^{(1)}\right) \cdot \vec{h}_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(-a_j^{(2)} + b_j^{(2)}\right) \cdot \vec{h}_j^{(2)} \quad (2.31)$$

Ahora es por el campo eléctrico transversal de un modo arbitrario  $l$ ,<sup>3</sup> por el que multiplicamos vectorialmente ambos términos de la expresión anterior, para integrar sobre la superficie  $s_0$ .

$$\int_{s_0} \vec{e}_l^{(0)} \times \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i^{(1)} + b_i^{(1)}\right) \cdot \vec{h}_i^{(1)} \right\} \cdot d\vec{s} = \int_{s_0} \vec{e}_l^{(0)} \times \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(-a_j^{(2)} + b_j^{(2)}\right) \cdot \vec{h}_j^{(2)} \right\} \cdot d\vec{s} \quad (2.32)$$

Un punto importante en esta sección es el hecho que no se puede aplicar la propiedad de ortogonalidad de los modos ya que en ambos términos aparece integrando el campo sobre la superficie de la discontinuidad y no se puede ampliar la integral a la superficie total de la guía. Sin embargo es posible aplicar las simplificaciones 2.24 y 2.25.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i^{(1)} + b_i^{(1)}\right) \cdot \int_{s_0} \vec{e}_l^{(0)} \times \vec{h}_i^{(1)} \cdot d\vec{s} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(-a_j^{(2)} + b_j^{(2)}\right) \cdot \int_{s_0} \vec{e}_l^{(0)} \times \vec{h}_j^{(2)} \cdot d\vec{s} \quad (2.33)$$

Para obtener finalmente

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i^{(1)} + b_i^{(1)}\right) \cdot X_{li}^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(-a_j^{(2)} + b_j^{(2)}\right) \cdot X_{lj}^{(2)} \quad (2.34)$$

---

<sup>3</sup>En donde  $l=1, 2, 3, \dots$

### 2.3.4. Formulación matricial

Hasta el momento se ha considerado la totalidad de los modos que intervienen en un problema electromagnético, es así que en la formulación matemática se obtienen infinitas incógnitas con infinitas ecuaciones, prueba de ello son las ecuaciones 2.26, 2.30 y 2.34.

Para una solución mas práctica no hace falta considerar la infinidad de modos, por tanto para obtener una buena aproximación a la solución real se ha de truncar el número de modos para cada guía. Los modos de mayor orden presentan amplitudes despreciables frente a los de orden inferior, por lo que resulta factible apoyarse en un número finito de modos para resolver el problema electromagnético. De esta forma se consigue redefinir los sistemas de ecuaciones en forma matricial.

Limitando el número de modos, tanto a la entrada como a la salida, en donde:

$N_1$  : Es el número de modos en la guía 1

$N_2$  : Es el número de modos en la guía 2

$N_0$  : Es el número de modos en discontinuidad.

Ahora las expresiones 2.26, 2.30 y 2.34, se reducen a:

$$\Delta_1(A_1 + B_1) = X_1^t C \quad (2.35)$$

$$\Delta_2(A_2 + B_2) = X_2^t C \quad (2.36)$$

$$X_1(A_1 + B_1) = X_2(-A_2 + B_2) \quad (2.37)$$

Donde:

$A_1, B_1$  : Son matrices columna  $[N_1 \times 1]$  que contienen las amplitudes complejas de los modos incidentes y reflejados, respectivamente, en la guía 1.

$A_2, B_2$  : Son matrices columna  $[N_2 \times 1]$  que contienen las amplitudes complejas de los modos incidentes y reflejados, respectivamente, en la guía 2.

$C$  : Es la matriz columna  $[N_0 \times 1]$  que contiene las amplitudes complejas de los modos en la superficie de la discontinuidad  $S_0$

$$\Delta = \left[ \Delta_{ij}^{(g)} \right] \text{ Matriz } [N_g \times N_g] \Delta_{ij}^g = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \int_{s_g} \vec{e}_i^{(g)} \times \vec{h}_i^{(g)} \cdot d\vec{s} & i = j \end{cases}$$

$$X_g = \left[ X_{ij}^{(g)} \right] \text{ Matriz } [N_\theta \times N_g], \text{ donde } X_{ij}^{(g)} = \int_{s_0} \vec{e}_i^{(0)} \times \vec{h}_j^{(g)} \cdot d\vec{s}_0$$

## 2.4. Matriz de dispersión Generalizada

La representación de la discontinuidad mediante un cuadripolo es posible, en la figura siguiente presentamos la idea. por tanto es posible entonces representar la discontinuidad mediante una matriz en donde se considera los modos de orden superior y no sólo el fundamental, es decir la Matriz de Dispersión Generalizada (MDG)

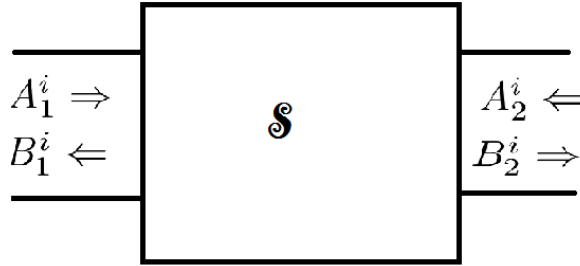


Figura 2.2: Cuadripolo de dos puertos.

La ecuación que rige este cuadripolo es 2.39, en donde pone de manifiesto la relación de las variables de entrada, salida y los parámetros  $S_{NN}$ .

$$\begin{aligned} B_1 &= S_{11} A_1 + S_{12} A_2 \\ B_2 &= S_{21} A_1 + S_{22} A_2 \end{aligned} \tag{2.38}$$



Recordemos que los parámetros  $S$ , a su vez son submatrices y que relacionan las amplitudes de los modos incidentes y reflejados en cada puerto.

Bien, volviendo a la MDG, si utilizamos las expresiones 2.35, 2.36 y 2.37 podemos expresar la matriz de dispersión que caracteriza la discontinuidad como sigue:

$$S = \begin{bmatrix} \Delta_1^{-1} X_1^t F X_1 - I & \vdots & \Delta_1^{-1} X_1^t F X_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \Delta_1^{-2} X_2^t F X_1 & \vdots & \Delta_2^{-1} X_2^t F X_2 - I \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

En donde:

$$F = 2(X_1 \Delta_1^{-1} X_1^t + X_2 \Delta_2^{-1} X_2^t)^{-1} \quad \text{Matriz } [N_0 \times N_0] \quad (2.40)$$

### 2.4.1. Condiciones geométricas

A continuación vamos a aplicar el desarrollo en una discontinuidad idéntica a la figura 2.4.1. Se observa, además de la evidencia que la puerta 2 es de radio mayor, la premisa de la igualdad en las superficies  $S_1 = S_0$ , por lo que los campos que se definen mediante la función 2.17 en la superficie  $S_0$ , serán los campos pertenecientes a la guía 1.

$$\vec{e}_i^{(0)} = \vec{e}_i^{(1)} \quad (2.41)$$

Por lo que podemos, nuevamente en las expresiones 2.35, 2.36 y 2.37 aplicar esta condición de geometría para obtener una ecuación matricial aún mas simplificada.

$$N_0 = N_1$$

$$X_{ij}^{(1)} = \int_{s_0} \vec{e}_i^{(0)} \times \vec{h}_j^{(1)} \cdot \vec{ds} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \int_{s_1} \vec{e}_i^{(1)} \times \vec{h}_i^{(1)} \cdot \vec{ds} & i = j \end{cases}$$

$$X_1 = \Delta_1$$

$$X_2 = X = [X_{ij}] \text{ donde } X_{ij} = \int_{s_1} \vec{e}_i^{(1)} \times \vec{h}_j^{(2)} \cdot \vec{ds}$$

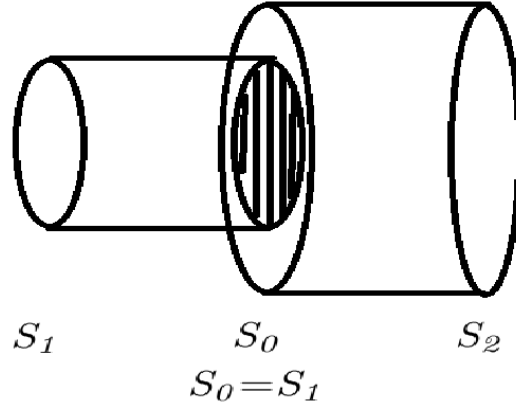


Figura 2.3: Equivalencia en superficies geométricas.

Teniendo en cuenta las modificaciones debido a las condiciones geométricas y aplicando a las ecuaciones matriciales, podemos llegar a la siguiente simplificación en cuanto al número de ecuaciones necesarias:

$$X^t(A_1 + B_1) = \Delta_2(A_2 + B_2) \quad (2.42)$$

$$\Delta_1(A_1 - B_1) = X(-A_2 + B_2) \quad (2.43)$$

Ahora solo tenemos dos ecuaciones puesto que se ha evitado el paso intermedio de particularizar el campo en la superficie de la discontinuidad. Ahora la matriz de dispersión del cuadripolo será:

$$S = \begin{bmatrix} F\Delta_1 - I & \vdots & FX \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_2^{-1}X^tF\Delta_1 & \vdots & \Delta_1^{-2}X^tFX - I \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Con  $F$

$$F = 2(\Delta_1 + X\Delta_2^{-1}X^t)^{-1} \quad \text{Matriz } [N_1 \times N_1] \quad (2.45)$$

### 2.4.2. Normalización de los modos

Dado que los modos forman un conjunto ortogonal, y en las guías usuales, también completo, vamos a normalizar los campos en potencia para poder desarrollar los modos en función de los mismos. A continuación escogeremos una condición de normalización que, por simplicidad será la de imponer que el flujo de potencia media portado por un modo normalizado a través de la sección transversal de la guía sea adimensionalmente la unidad. Empezamos definiendo los campos normalizados como :

$$\tilde{e}_i^{(g)} = \frac{\vec{e}_i^{(g)}}{\sqrt{\Delta_i^{(g)}}} \quad (2.46)$$

$$\tilde{h}_j^{(g)} = \frac{\vec{h}_j^{(g)}}{\sqrt{\Delta_j^{(g)}}} \quad (2.47)$$

Donde

$$\Delta_j^{(g)} = \int_{s_g} \vec{e}_i^{(g)} \times \vec{h}_i^{(g)} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{Z_i^{(g)}} \int_{s_g} \vec{e}_i^{(g)} \cdot \vec{e}_i^{(g)} \cdot ds \quad (2.48)$$

Utilizándose:  $\vec{h} = \frac{1}{Z}(\hat{z} \times \vec{e})$ .

Para la matriz  $\Delta_g = [\tilde{\Delta}_{ij}^{(g)}]$ , como  $\Delta_{ij}^{(g)} = 0$  cuando  $i \neq j$ , entonces para  $i=j$ , la diagonal queda:

$$\begin{aligned} \Delta_{ii}^{(g)} &= \int_{s_g} \tilde{e}_i^{(g)} \times \tilde{h}_i^{(g)} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{Z_i^{(g)}} \int_{s_g} \tilde{e}_i^{(g)} \cdot \tilde{e}_i^{(g)} \cdot ds = \\ &= \frac{1}{Z_i^{(g)}} \int_{s_g} \frac{\vec{e}_i^{(g)}}{\sqrt{\Delta_i^{(g)}}} \cdot \frac{\vec{e}_i^{(g)}}{\sqrt{\Delta_i^{(g)}}} \cdot ds = 1 \end{aligned}$$

En definitiva será la matriz diagonal identidad, es decir  $\Delta_g = I$

En relación a la matriz  $\tilde{X}$ , que llamaremos matriz de cruce, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}_{ij} &= \int_{s_1} \tilde{e}_i^{(1)} \times \tilde{h}_j^{(2)} ds = \frac{1}{Z_i^{(2)}} \int_{s_1} \tilde{e}_i^{(1)} \cdot \tilde{e}_j^{(2)} ds = \\
 &= \frac{1}{Z_j^{(2)}} \int_{s_1} \frac{\vec{e}_i^{(1)}}{\sqrt{\Delta_i^{(1)}}} \cdot \frac{\vec{e}_j^{(2)}}{\sqrt{\Delta_j^{(2)}}} \cdot ds = \\
 &= \sqrt{\frac{Z_i^{(1)}}{Z_j^{(2)}}} \int_{s_1} \frac{\vec{e}_i^{(1)}}{\sqrt{\delta_i^{(1)}}} \cdot \frac{\vec{e}_j^{(2)}}{\sqrt{\delta_j^{(2)}}} \cdot ds = \\
 &= \sqrt{\frac{Z_i^{(1)}}{Z_j^{(2)}}} \frac{\tilde{x}_{ij}}{\sqrt{\delta_i^{(1)}} \sqrt{\delta_j^{(2)}}}
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Donde

$$\delta_n^{(g)} = \int_{s_g} \vec{e}_n^{(g)} \cdot \vec{e}_n^{(g)} ds \tag{2.50}$$

$$\tilde{x}_{ij} = \int_{s_1} \vec{e}_i^{(1)} \cdot \vec{e}_j^{(2)} ds \tag{2.51}$$

Y por último  $Z_n^g$  es la impedancia del modo  $n$  en la guía  $g$ .

Con las nuevas simplificaciones se obtienen las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\begin{aligned}
 X^t(A_1 + B_1) &= (A_2 + B_2) \\
 (A_1 - B_1) &= X(-A_2 + B_2)
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Por consiguiente podemos obtener la nueva matriz de dispersión generalizada de una forma mas simplificada:

$$S = \begin{bmatrix} F - I & \vdots & FX \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X^t F & \vdots & X^t F X - I \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

En donde:

$$F = 2(I + XX^t)^{-1} \quad \text{Matriz } [N_I \times N_I] \quad (2.54)$$

La matriz  $X$ ,  $[N_I \times N_I]$ , que relaciona los campos de los modos de la guía 1 con la guía 2, como se ha mencionado se llama *Matriz de cruce*.

$$\tilde{X}_{ij} = \sqrt{\frac{Z_i^{(1)}}{Z_j^{(2)}}} \frac{\tilde{x}_{ij}}{\sqrt{\delta_i^{(1)}} \sqrt{\delta_j^{(2)}}} \quad (2.55)$$

## 2.5. Discontinuidad Radio Mayor-Radio Menor

Se ha realizado el estudio de una discontinuidad de radio de salida mayor al de la entrada, para el estudio del caso inverso desde el punto de vista de los acoplos y reflexiones está claro que el análisis debería ser distinto.

Recordemos que el procedimiento era posible y las ecuaciones de cruce estaban condicionadas a las superficies de integración y que había una coincidencia en las superficies  $S_I = S_0$ , ahora en el caso inverso la coincidencia es  $S_2 = S_0$ , esto implica que las ecuaciones han de cambiar en cuanto a su desarrollo y superficies de integración.

No obstante si tratamos al cuadripolo como un sistema lineal y como hemos trabajado con ecuaciones algebraicas matriciales, y no con sistemas de ecuaciones diferenciales, entonces podemos designar la matriz inversa de los coeficientes de acoplos y reflejados como la matriz que describe la discontinuidad de radio de salida menor que el de la entrada.

Esta consideración lo hemos de realizar antes de la respectiva transformación a los parámetros S. La obtención de dichos parámetros se obtendrán una vez se haya aplicado las transformaciones a la nueva matriz inversa en la discontinuidad.

## 2.6. Cálculo de la Matriz de dispersión

Aunque el método del análisis modal se utilice para el estudio electromagnético de diversas geometrías y contempla todos los modos existentes en las mismas, en este proyecto se verá como solo el modo fundamental <sup>4</sup> es necesario como fuente de excitación. Empezamos citando las expresiones de los modos, presentes en el interior de la guía cilíndrica hueca, que se obtuvieron en el segundo capítulo:

Para los modos  $TE_{mn}$ :

$$E_z(\rho, \phi) = 0 \quad (2.56)$$

$$E_\rho(\rho, \phi) = \frac{j\omega\mu}{\rho} \cdot m \cdot J_m\left(\frac{q'_{mn}}{a}\rho\right) \left(\sin(m\phi) + \cos(m\phi)\right) \quad (2.57)$$

$$E_\phi(\rho, \phi) = j\omega\mu \cdot K_{C_{TE}}^{mn} J'_m\left(\frac{q'_{mn}}{a}\rho\right) \left(\cos(m\phi) + \sin(m\phi)\right) \quad (2.58)$$

$$H_z(\rho, \phi) = K_{C_{TE}}^{mn} \cdot J_m\left(\frac{q'_{mn}}{a}\rho\right) \left(\cos(m\phi) + \sin(m\phi)\right) \quad (2.59)$$

$$H_\rho(\rho, \phi) = -j\beta_{g_{TE}}^{mn} \cdot K_{C_{TE}}^{mn} \cdot J'_m\left(\frac{q'_{mn}}{a}\rho\right) \left(\sin(m\phi) + \cos(m\phi)\right) \quad (2.60)$$

$$H_\phi(\rho, \phi) = j\beta_{g_{TE}}^{mn} \cdot m \cdot \frac{1}{\rho} J_m\left(\frac{q'_{mn}}{a}\rho\right) \left(\cos(m\phi) + \sin(m\phi)\right) \quad (2.61)$$

Para los modos  $TM_{mn}$ :

$$E_z(\rho, \phi) = K_{C_{TM}}^{mn} \cdot J_m\left(\frac{p_{mn}}{a}\rho\right) \left(\cos(m\phi) + \sin(m\phi)\right) \quad (2.62)$$

$$E_\rho(\rho, \phi) = -j\beta_{g_{TM}}^{mn} \cdot K_{C_{TM}}^{mn} \cdot J'_m\left(\frac{p_{mn}}{a}\rho\right) \left(\cos(m\phi) + \sin(m\phi)\right) \quad (2.63)$$

$$E_\phi(\rho, \phi) = j\beta_{g_{TM}}^{mn} \cdot m \cdot \frac{1}{\rho} J_m\left(\frac{p_{mn}}{a}\rho\right) \left(\sin(m\phi) + \cos(m\phi)\right) \quad (2.64)$$

$$H_z(\rho, \phi) = 0 \quad (2.65)$$

---

<sup>4</sup>El modo  $TE_{11}$

$$H_\rho(\rho, \phi) = j\omega\varepsilon \cdot m \frac{1}{\rho} \cdot J_m\left(\frac{p_{mn}}{a}\rho\right) \left(\sin(m\phi) + \cos(m\phi)\right) \quad (2.66)$$

$$H_\phi(\rho, \phi) = -j\omega\varepsilon \cdot K_{CTM}^{mn} J'_m\left(\frac{p_{mn}}{a}\rho\right) \left(\cos(m\phi) + \sin(m\phi)\right) \quad (2.67)$$

En donde

$$J'_m\left(\frac{X_{mn}}{a}\rho\right) = \frac{m}{\rho} J_m\left(\frac{X_{mn}}{a}\rho\right) - \frac{X_{mn}}{a} J_{m+1}\left(\frac{X_{mn}}{a}\rho\right)$$

Nuestro objetivo es hallar los parámetros  $S$  que representan al cuadripolo.

Retomando las expresiones: 2.50, 2.51, 2.55 vamos a calcular la matriz de cruce  $X_{ij}$ . Esta matriz relaciona los modos de las dos guías contiguas. Es una matriz cuyo número de filas coincide con el número de modos considerados en la guía 1 ( $N_1$ ), mientras que el número de columnas corresponde al número de modos considerados en la guía 2 ( $N_2$ ).

Al tratarse del análisis de estructuras con simetría cilíndrica y que siempre se excitara la entrada con el modo  $TE_{11}$ , la respuesta modal del sistema se simplifica, es así que sólo se tienen en cuenta los modos con índice azimutal igual a 1, puesto que el resto no se excitan.

En la interacción de las guías contiguas unidas por la discontinuidad se pueden producir cuatro formas de acoplamientos entre los modos presentes, en la siguiente figura se observa dichos acoplos:

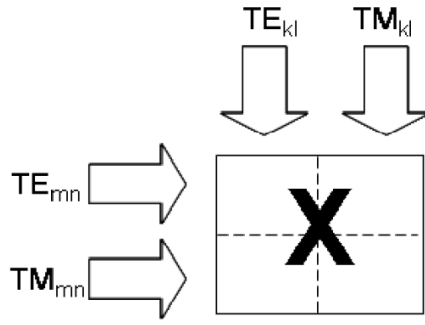


Figura 2.4: Cruce de modos en una discontinuidad

TE - TE

TE - TM

TM - TE

TM - TM

$$\tilde{X}_{ij} = \sqrt{\frac{Z_i^{(1)}}{Z_j^{(2)}}} \frac{\tilde{x}_{ij}}{\sqrt{\delta_i^{(1)}} \sqrt{\delta_j^{(2)}}}$$

### 2.6.1. Cálculo de la impedancia del modo.

Para cada familia de modos existe una impedancia propia y de igual forma para cada modo de una determinada familia, pero una forma genérica de hacerlo es:

Impedancia para los modos  $TE$

$$Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma_{mn}} = \pm \frac{\eta}{\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}} \quad (2.68)$$

Impedancia para los modos  $TM$

$$Z_{TM} = \frac{\gamma_{mn}}{j\omega\varepsilon} = \pm \eta \sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}} \quad (2.69)$$

### 2.6.2. Cálculo de la constante de normalización de los modos.

Retomando la expresión 2.50:

$$\delta_n^{(g)} = \int_{s_g} \vec{e}_n^{(g)} \cdot \vec{e}_n^{(g)} ds$$



y los campos en el interior de la guía de radio  $a$  que definimos en las expresiones de 2.56 hasta 2.67, podemos realizar el desarrollo de esta integral.

Empezamos:

$$\delta_n^{(g)} = \int_{s_g} \vec{e}_n^{(g)} \cdot \vec{e}_n^{(g)} ds = \int_{s_g} \left( (e_{n\rho}^{(g)})^2 + (e_{n\phi}^{(g)})^2 \right) ds$$

En donde

$\vec{e}_n^{(g)}$  Son los campos eléctricos transversales de los modos propios  $n$  de la guía.

$S_g$  Es la sección transversal de la guía  $g$ , 1 ó 2.

Para los modos  $TE_{1n}$ :

$$\delta_n^{(g)} = (j\omega\mu)^2 \int_{\rho=0}^a \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[ \frac{J_1(K_{1n}\rho)^2}{\rho^2} \left\{ \frac{\sin^2(\phi)}{\cos^2(\phi)} + K_{1n}^2 J_1'(K_{1n}\rho)^2 \left\{ \frac{\cos^2(\phi)}{\sin^2(\phi)} \right\} \right\} \right] \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\phi \quad (2.70)$$

Las dos expresiones representadas en la ecuación anterior representan las dos polarizaciones,  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$ , respectivamente

El comportamiento en la variable  $\phi$  sería el siguiente:

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \cos^2(\phi) d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin^2(\phi) d\phi = \pi \quad (2.71)$$

Entonces

$$\delta_n^{(g)} = (j\omega\mu)^2 \pi \int_{\rho=0}^a \left[ \frac{J_1(K_{1n}\rho)}{\rho^2} + K_{1n}^2 J_1'(K_{1n}\rho)^2 \right] \cdot \rho \cdot d\rho \quad (2.72)$$

Para resolver esta ecuación, que ahora es solo dependiente de la variable  $\rho$ , recurrimos a la fórmula de Lommel y las ecuaciones de recurrencia de Bessel<sup>5</sup>

---

5

- Integral de Lommel:

$$\int_0^x x J_n(\alpha x) J_n(\beta x) dx = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} \left[ J_n(\alpha x) \frac{d}{dx} J_n(\beta x) - J_n(\beta x) \frac{d}{dx} J_n(\alpha x) \right]$$

- Relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel:

Para llegar a:

$$\delta_n^{(g)} = \frac{(j\omega\mu)^2}{4} \pi q_{1n}'^2 [J_0(q_{1n}')^2 + J_1(q_{1n}')^2 + J_2(q_{1n}')^2 - J_1(q_{1n}')J_3(q_{1n}')] \quad (2.73)$$

Aplicando nuevamente las relaciones de recurrencia, y sabiendo que para los modos  $TE$  se cumple que  $J_m'(q_m'n) = 0$ , la expresión al final nos queda.

$$\delta_n^{(g)} = \frac{(j\omega\mu)^2}{2} \pi (q_{1n}'^2 - 1) J_1(q_{1n}')^2 \quad (2.74)$$

Para los modos  $TM_{1n}$ :

Bajo las mismas consideraciones que en el apartado anterior desarrollamos la normalización para las expresiones de los modos eléctricos<sup>6</sup>.

$$\delta_n^{(g)} = (j\beta_{1n})^2 \int_{\rho=0}^a \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[ K_{1n}^2 J_1'(K_{1n}\rho)^2 \begin{Bmatrix} \cos^2(\phi) \\ \sin^2(\phi) \end{Bmatrix} + \frac{J_1(K_{1n}\rho)^2}{\rho^2} \begin{Bmatrix} \sin^2(\phi) \\ \cos^2(\phi) \end{Bmatrix} \right] \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\phi \quad (2.75)$$

Al igual que en los modos  $TE_{1n}$ , quedan representadas en función de las polarizaciones,  $\hat{y}$  y  $\hat{x}$ , respectivamente. Utilizando las mismas propiedades de recurrencia y la fórmula de Lommel, nuevamente llegamos a una expresión idéntica:

$$\delta_n^{(g)} = \frac{(j\beta_{1n})^2}{4} \pi p_{1n}^2 [J_0(p_{1n})^2 + J_1(p_{1n})^2 + J_2(p_{1n})^2 - J_1(p_{1n})J_3(p_{1n})] \quad (2.76)$$

Ahora para los modos  $TM$  se cumple que  $J_m(p_m n) = 0$ , la expresión que finalmente nos queda es:

$$\delta_n^{(g)} = \frac{(j\beta_{1n})^2}{2} \pi p_{1n}^2 J_1'(p_{1n})^2 \quad (2.77)$$

---


$$J_m'(z) = \frac{1}{2} [J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z)]$$

$$\frac{m}{2} J_m(z) = \frac{1}{2} [J_{m-1}(z) + J_{m+1}(z)]$$

$$z \cdot J_m'(z) = z \cdot J_{m-1}(z) - m J_m(z)$$

<sup>6</sup>Es otra forma de nombrar a los modos transversales magnéticos

### 2.6.3. Cálculo Analítico de la matriz de cruce

Empezamos con la expresión 2.55

$$\tilde{X}_{ij} = \sqrt{\frac{Z_i^{(1)}}{Z_j^{(2)}}} \frac{\tilde{x}_{ij}}{\sqrt{\delta_i^{(1)}} \sqrt{\delta_j^{(2)}}}$$

Esta expresión indica el cruce entre un modo de índice  $i$  perteneciente a la guía  $1$ , y otro modo de índice  $j$  propio de la guía  $2$ . Si hacemos referencia a las cuatro combinaciones presentadas en 2.6, entonces podemos presentar el desarrollo en cuatro combinaciones posibles.

Empezando solo por la expresión sin normalizar  $\tilde{x}_{ij}$

$$\tilde{x}_{ij} = \int_{s_1} \vec{e}_i^{(1)} \cdot \vec{e}_j^{(2)} ds = \int_{s_1} \left( \left( e_{i\rho}^{(1)} \cdot e_{j\rho}^{(2)} \right) + \left( e_{i\phi}^{(1)} \cdot e_{j\phi}^{(2)} \right) \right) \cdot ds$$

En donde

$\vec{e}_{i,j}^{(1,2)}$  Son los campos eléctricos transversales de los modos propios  $i$  y  $j$  de las guías  $1$  y  $2$ , con radios  $R1$  y  $R2$  respectivamente.

$S_g$  Es la sección transversal de la guía  $g$ ,  $1$  ó  $2$ .

$S_1$  Es la sección transversal de la guía  $1$ , igual que la guía  $0$ .

Para la combinación Modos  $TE_{1i} - TE_{1j}$

Tomamos las expresiones de los campos eléctricos de los modos transversales eléctricos (2.57, 2.58), y como radios de entrada y salida  $R1$  y  $R2$ , respectivamente, entonces la integral anterior resulta:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{(ij)} = (j\omega\mu)^2 \int_{\rho=0}^{\rho=R1} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[ \frac{J_1(K_{1i}\rho) J_1(K_{1j}\rho)}{\rho^2} \begin{cases} \sin^2(\phi) \\ \cos^2(\phi) \\ \sin(\phi) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) \sin(\phi) \end{cases} + \dots \right. \\ \left. \dots K_{1i} K_{1j} J_1'(K_{1i}\rho) J_1'(K_{1j}\rho) \begin{cases} \cos^2(\phi) \\ \sin^2(\phi) \\ \cos(\phi) \sin(\phi) \\ \sin(\phi) \cos(\phi) \end{cases} \right] \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\phi \quad (2.78) \end{aligned}$$

De la que podemos obtener cuatro soluciones para las combinaciones de senoidales y consenoidales que serán para los casos:

$$\hat{y} - \hat{y}$$

$$\hat{x} - \hat{x}$$

$$\hat{y} - \hat{x}$$

$$\hat{x} - \hat{y}$$

respectivamente.

Recordando 2.71, y sabiendo que

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi = 0 \quad (2.79)$$

Resulta que la integral inicial sólo será distinta de cero para las combinaciones de los modos

$$\hat{y} - \hat{y}$$

$$\hat{x} - \hat{x}$$

Por tanto tenemos:

$$\tilde{x}_{(ij)} = (j\omega\mu)^2 \pi \cdot \int_{\rho=0}^{\rho=R1} \left[ \frac{J_1(K_{1i}\rho)J_1(K_{1j}\rho)}{\rho^2} + K_{1i}K_{1j}J'_1(K_{1i}\rho)J'_1(K_{1j}\rho) \right] \cdot \rho \cdot d\rho \quad (2.80)$$

Realizando un cambio de variable  $\Gamma = K_{1i}\rho$  y  $K = \frac{K_{1j}}{K_{1i}}$ , llegamos a la expresión

$$\tilde{x}_{(ij)} = (j\omega\mu)^2 \pi \cdot K I_{ij}$$

En donde

$$I_{ij} = \int_{\Gamma=0}^{\Gamma=q_{1i}} \left[ \frac{J_1(\Gamma)J_1(K\Gamma)}{K\Gamma^2} + J'_1(K\Gamma)J'_1(\Gamma) \right] \Gamma \cdot d\Gamma \quad (2.81)$$

Si aplicamos la fórmula de Lommel y las propiedades de recurrencia de las funciones de Bessel nos queda:

$$I_{ij} = \frac{kq'_{1i}J_1(Kq'_{1i})J'_1(q'_{1i}) - q'_{1i}J_1(q'_{1i})J'_1(Kq'_{1i})}{K^2 - 1}$$

Teniendo en cuenta para los modos  $TE$ , se cumple  $J'_m(q'_{mn}) = 0$ , llegamos a un resultado final para éstos modos:

$$\tilde{x}_{(ij)} = (\omega\mu)^2 \pi \cdot \frac{k_{1j} R1 J_1(K_{1i}) J'_1(K_{1j} R1)}{\left(\frac{K_{1j}}{K_{1i}}\right)^2 - 1} \quad (2.82)$$

*Para la combinación Modos  $TM_{1i} - TM_{1j}$*

De forma similar y con las mismas consideraciones, tomamos las expresiones de los campos eléctricos, pero esta vez de los modos transversales magnéticos 2.63 y 2.64. Tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{(ij)} = (j\omega\mu)^2 \int_{\rho=0}^{\rho=R1} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[ \frac{J_1(K_{1i}\rho) J_1(K_{1j}\rho)}{\rho^2} \begin{cases} \sin^2(\phi) \\ \cos^2(\phi) \\ \sin(\phi) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) \sin(\phi) \end{cases} + \dots \right. \\ \left. \dots K_{1i} K_{1j} J'_1(K_{1i}\rho) J'_1(K_{1j}\rho) \begin{cases} \cos^2(\phi) \\ \sin^2(\phi) \\ \cos(\phi) \sin(\phi) \\ \sin(\phi) \cos(\phi) \end{cases} \right] \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\phi \quad (2.83) \end{aligned}$$

En donde podemos obtener cuatro soluciones para las combinaciones que serán para los casos:

$$\hat{y} - \hat{y}$$

$$\hat{x} - \hat{x}$$

$$\hat{y} - \hat{x}$$

$$\hat{x} - \hat{y}$$

respectivamente.

Idénticamente al caso anterior se toman sólo las combinaciones  $\hat{x} - \hat{x}$  y  $\hat{y} - \hat{y}$ , ya que el resto serán nulas.

Aplicando el cambio de variable  $\Gamma = K_{1i}\rho$ , resumimos el procedimiento ya que es idénticamente igual al caso anterior, obteniendo:

$$\tilde{x}_{(ij)} = (j)^2 \beta_{1i} \beta_{1j} \pi \cdot K I_{ij}$$

En donde se ha aplicado 2.81 y sabiendo que se cumple  $J_m(P_{mn}) = 0$ , para los modos  $TM$ . Llegamos a una segunda ecuación de cruce.

$$\tilde{x}_{(ij)} = -\beta_{1i}\beta_{1j}\pi \cdot \frac{K_{1j}^2 R_1 J_1(K_{1i}) J_1'(K_{1j} R_1)}{K_{1i} \left( \frac{K_{1j}}{K_{1i}} \right)^2 - 1} \quad (2.84)$$

*Para la combinación Modos  $TE_{1i} - TM_{1j}$*

Sustituyendo en  $\tilde{x}_{(ij)}$  las expresiones 2.57, 2.58, 2.63 y 2.64:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{(ij)} = j^2 \omega \mu \beta_{1j} \int_{\rho=0}^{\rho=R_1} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[ \mp k_{1j} \frac{J_1(K_{1i}\rho) J_1'(K_{1j}\rho)}{\rho} \begin{cases} \sin(\phi) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) \sin(\phi) \\ \sin^2(\phi) \\ \cos^2(\phi) \end{cases} \mp \dots \right. \\ \left. \dots k_{1i} \frac{J_1'(K_{1i}\rho) J_1(K_{1j}\rho)}{\rho} \begin{cases} \cos(\phi) \sin(\phi) \\ \sin(\phi) \cos(\phi) \\ \cos^2(\phi) \\ \sin^2(\phi) \end{cases} \right] \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\phi \quad (2.85) \end{aligned}$$

Donde resultan cuatro soluciones para las combinaciones que serán para los casos:

$$\hat{y} - \hat{y}$$

$$\hat{x} - \hat{x}$$

$$\hat{y} - \hat{x}$$

$$\hat{x} - \hat{y}$$

respectivamente.

En este caso únicamente las combinaciones de modos  $\hat{y} - \hat{x}$  y  $\hat{x} - \hat{y}$  son distintas de cero.

$$\tilde{x}_{(ij)} = j^2 \omega \mu \beta_{1j} \pi \int_{\rho=0}^{\rho=R_1} \left[ \mp k_{1j} \frac{J_1(K_{1i}\rho) J_1'(K_{1j}\rho)}{\rho} \mp k_{1i} \frac{J_1'(K_{1i}\rho) J_1(K_{1j}\rho)}{\rho} \right] \cdot \rho \cdot d\rho \quad (2.86)$$

Aplicando el cambio de variable  $\Gamma = K_{1i}\rho$  obtenemos:

$$\tilde{x}_{(ij)} = \mp j^2 \omega \mu \beta_{1j} \pi k E_{ij}$$

Donde

$$E_{ij} = \int_{\Gamma=0}^{\Gamma=q'_{1i}} \left[ J_1(\Gamma) J'_1(K\Gamma) + \frac{J'_1(\Gamma) J_1(K\Gamma)}{K} \right] d\Gamma$$

Nuevamente aplicando las ecuaciones de recurrencia de la funciones de Bessel y la fórmula Lommel se llega a:

$$E_{ij} = \int_{\Gamma=0}^{\Gamma=q'_{1i}} \frac{R}{2} \left[ J_0(\Gamma) J_0(K\Gamma) - J_2(\Gamma) J_2(K\Gamma) \right] d\Gamma$$

$$E_{ij} = \frac{1}{k} J_1(Kq'_{1i}) J_1(q'_{1i})$$

Si consideramos que en cada tipo de modo se cumple que:  $J'_m(q'_{mn}) = 0$  y  $J_m(P_{mn}) = 0$ , entonces para las combinaciones  $\hat{y} - \hat{x}$  y  $\hat{x} - \hat{y}$ , tenemos:

$$\tilde{x}_{(ij)} = \mp \omega \mu \beta_{1j} \pi \cdot J_1(K_{1j} R_1) J_1(K_{1i} R_1) \quad (2.87)$$

Para la combinación Modos  $TM_{1i} - TE_{1j}$

Para este caso tenemos:

$$\tilde{x}_{(ij)} = j^2 \omega \mu \beta_{1i} \int_{\rho=0}^{\rho=R_1} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[ \mp k_{1i} \frac{J'_1(K_{1i} \rho) J_1(K_{1j} \rho)}{\rho} \begin{cases} \cos(\phi) \sin(\phi) \\ \sin(\phi) \cos(\phi) \\ \cos^2(\phi) \\ \sin^2(\phi) \end{cases} \mp \dots \right.$$

$$\left. \dots k_{1j} \frac{J_1(K_{1i} \rho) J'_1(K_{1j} \rho)}{\rho} \begin{cases} \sin(\phi) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) \sin(\phi) \\ \sin^2(\phi) \\ \cos^2(\phi) \end{cases} \right] \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\phi \quad (2.88)$$

En donde podemos obtener cuatro soluciones para las combinaciones que serán para los casos:

$$\hat{y} - \hat{y}$$

$$\hat{x} - \hat{x}$$

$$\hat{y} - \hat{x}$$

$$\hat{x} - \hat{y}$$

respectivamente.

Únicamente las combinaciones de modos  $\hat{y}$  -  $\hat{x}$  y  $\hat{x}$  -  $\hat{y}$  son distintas de cero.

$$\tilde{x}_{(ij)} = j^2 \omega \mu \beta_{1i} \pi \int_{\rho=0}^{\rho=R1} \left[ \mp k_{1i} \frac{J'_1(K_{1i}\rho) J_1(K_{1j}\rho)}{\rho} \mp k_{1j} \frac{J_1(K_{1i}\rho) J'_1(K_{1j}\rho)}{\rho} \right] \cdot \rho \cdot d\rho \quad (2.89)$$

Aplicando el cambio de variable  $\Gamma = K_{1i}\rho$  obtenemos:

$$\tilde{x}_{(ij)} = \mp j^2 \omega \mu \beta_{1i} \pi k E_{ij}$$

Donde

$$E_{ij} = \int_{\Gamma=0}^{\Gamma=q_{1i}} \frac{R}{2} \left[ J_0(\Gamma) J_0(K\Gamma) - J_2(\Gamma) J_2(K\Gamma) \right] d\Gamma$$

$$E_{ij} = \frac{1}{k} J_1(KP_{1i}) J_1(P_{1i})$$

Finalmente aplicando  $J'_m(q'_{mn}) = 0$  y  $J_m(P_{mn}) = 0$  se obtiene:

$$\tilde{x}_{(ij)} = 0 \quad (2.90)$$

Con la intención de tener resumidas las expresiones de cruce, en función de los modos y de sus respectivas polarizaciones, presentamos el siguiente cuadro.

Relaciones de cruce					
		$TE_{1j}^{(2)}$		$TM_{1j}^{(2)}$	
$2TE_{1i}^{(1)}$	$\hat{x}$	Ec: 2.82	Null	Null	Ec: 2.87,a
	$\hat{y}$	Null	Ec: 2.82	Ec: 2.87,b	Null
$2TM_{1i}^{(1)}$	$\hat{x}$	Null	Null	Ec: 2.84	Null
	$\hat{y}$	Null	Null	Null	Ec: 2.84



$$\text{Ecuación: 2.82} \quad \tilde{x}_{(ij)} = (\omega\mu)^2 \pi \cdot \frac{k_{1j} R1 J_1(K_{1i}) J_1'(K_{1j} R1)}{\left(\frac{K_{1j}}{K_{1i}}\right)^2 - 1}$$

$$\text{Ecuación: 2.84} \quad \tilde{x}_{(ij)} = -\beta_{1i} \beta_{1j} \pi \cdot \frac{K_{1j}^2 R1 J_1(K_{1i}) J_1'(K_{1j} R1)}{K_{1i} \left(\frac{K_{1j}}{K_{1i}}\right)^2 - 1}$$

$$\text{Ecuación: 2.87a} \quad \tilde{x}_{(ij)} = -\omega\mu\beta_{1j}\pi \cdot J_1(K_{1j} R1) J_1(K_{1i} R1)$$

$$\text{Ecuación: 2.87b} \quad \tilde{x}_{(ij)} = \omega\mu\beta_{1j}\pi \cdot J_1(K_{1j} R1) J_1(K_{1i} R1)$$

$$\text{Ecuación: 2.90} \quad \tilde{x}_{(ij)} = 0$$

Una vez que se han desarrollado los cuatro casos, se normaliza cada una de las expresiones utilizando la ecuación 2.55.

$$\tilde{X}_{ij} = \sqrt{\frac{Z_i^{(1)}}{Z_j^{(2)}}} \frac{\tilde{x}_{ij}}{\sqrt{\delta_i^{(1)}} \sqrt{\delta_j^{(2)}}}$$

Recordemos que:

$$\text{Para los modos } TE_{1n} : \quad \delta_n^{(g)} = \frac{(j\omega\mu)^2}{2} \pi (q_{1n}'^2 - 1) J_1(q_{1n}')^2$$

$$\text{Para los modos } TM_{1n} \quad \delta_n^{(g)} = \frac{(j\beta_{1n})^2}{2} \pi p_{1n}^2 J_1'(p_{1n})^2$$

$$\text{También: } Z_{TE} = \pm \frac{\eta}{\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}}, \text{ y finalmente: } Z_{TM} = \pm \eta \sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}$$

Considerando la simetría cilíndrica de la estructura y el hecho de que siempre se excitara la entrada con el modo  $TE_{11}$ , se simplifica la respuesta modal del sistema. Solo se tienen en cuenta los modos con índice azimutal igual a 1, puesto que el resto no se excitan.

Por lo tanto, basta con utilizar las familias de los modos  $TE_{1i}$  y  $TE_{1j}$  para conseguir una representación completa del campo. Tampoco es preciso utilizar los modos con ambas polarizaciones pues únicamente se excitará la guía con una de ellas.

Una vez calculada la matriz de cruce  $X$ , se puede hallar la matriz de dispersión generalizada  $S$  a partir de la expresión 2.53.

$$S_{11} : \text{Matriz de dimensiones } N_I \times N_I \Rightarrow S_{11} = F - I$$

$S_{12}$  : Matriz de dimensiones  $N_1 \times N_2 \Rightarrow S_{12} = FX$

$S_{21}$  : Matriz de dimensiones  $N_2 \times N_1 \Rightarrow S_{21} = X^t F$

$S_{22}$  : Matriz de dimensiones  $N_2 \times N_2 \Rightarrow S_{22} = X^t FX - I$

Donde

$$F = 2(I + XX^t)^{-1} \quad \text{Matriz } [N_1 \times N_1]$$

## Capítulo 3

# Diseño de Antenas Corrugadas

En este tercer capítulo pretendemos aplicar todo el análisis matemático presentado en capítulos anteriores. Aplicaremos la Matriz de cruce a una discontinuidad, en una guía de ondas, en la que el radio de salida es ligeramente mayor al de entrada. El análisis del caso inverso en el capítulo anterior se explicó. En esta parte del proyecto vamos a presentar los resultados.

Hemos explicado que mediante una sección de guía onda se unen dos discontinuidades, obteniendo así una corrugación (Figura 3.3). A partir de esta primera unión y repitiendo el proceso podemos ir perfilando una antena cilíndrica corrugada con un determinado radio de entrada y salida. Esto lo veremos más adelante.

Todo este procedimiento, desde el punto de vista electromagnético se realiza mediante la unión de varios cuadripolos representados mediante sus respectivos parámetros  $S$ . En este capítulo explicaremos el procedimiento.

Realizamos dos tipos de simulaciones: Una primera con el programa de análisis electromagnético CST Visual Studio, y una segunda con nuestro código implementado en Matlab. Las gráficas que nos proporcionan estas simulaciones las contrastaremos y observaremos las diferencias entre ellas.

Para el análisis de las estructuras en nuestro código nos vamos a servir de varios *scripts* sintetizados en Matlab. Algunos de estos *scripts* constan de funciones en las que se determinan los valores de los distintos acoplos detallados en el capítulo anterior. Los programas en Matlab se han desarrollado para antiguos trabajos realizados en otras áreas de investigación, en concreto en la optimización de bocinas lisas [8].

En la misma línea, para la síntesis de la antena se hace uso de otras expresiones matemáticas en las que se establecen el tipo de perfil y que las hemos creado en Matlab (*scripts*), y que la hemos utilizado en el diseño de la estructura. Estas expresiones matemáticas están reflejadas en publicaciones sobre trabajos igualmente enfocados en el estudio de alimentadores, como por ejemplo en [10]

### 3.1. Análisis de estructura simple

Haciendo referencia a la figura 3.1, tenemos dos discontinuidades de radios distintos, unidos por una parte de sección de guía de ondas. Si obtenemos los parámetros  $S$  de la primera discontinuidad y los desplazamos hasta la segunda discontinuidad podremos obtener los parámetros  $S$  del conjunto.

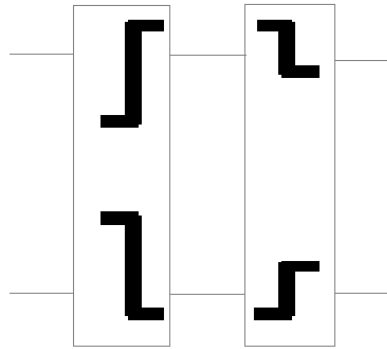


Figura 3.1: Discontinuidades unidas por sección de guía.

En el capítulo anterior se explicó como obtener, a partir de la matriz  $X_{ij}$ , los parámetros  $S$  en las discontinuidades. Como recordatorio mencionamos nuevamente las transformaciones.

$$\begin{aligned} S_{11} &= F - I \\ S_{12} &= FX \\ S_{21} &= X^t F \\ S_{22} &= X^t FX - I \end{aligned}$$

Donde:

$$F = 2(I + XX^t)^{-1} \dots \dots \dots \text{Matriz } [N_1 \times N_1]$$

y

$$\tilde{X}_{ij} = \sqrt{\frac{Z_i^{(1)}}{Z_j^{(2)}}} \frac{\tilde{x}_{ij}}{\sqrt{\delta_i^{(1)}} \sqrt{\delta_j^{(2)}}}$$

Hay que tener presente que los valores de la matriz  $X_{ij}$ , son función de los distintos acoplos que se producen en la discontinuidad.

### 3.2. Propagación en una sección de guía

En la sección de guía cilíndrica hueca solo se produce propagación de los campos, por tanto podemos tratar directamente con parámetros  $S$  sin la necesidad de transformación alguna.

Como desde el principio se ha considerado las paredes de la estructura ideales y por ende sin pérdidas, en la propagación de este recinto cerrado solo se establecerán los cambios de fase propios de la propagación y no las posibles pérdidas que en circunstancias reales habría que contemplar.

La matriz que caracteriza esta propagación la denominamos Matriz  $G$ , y se define de la siguiente forma:

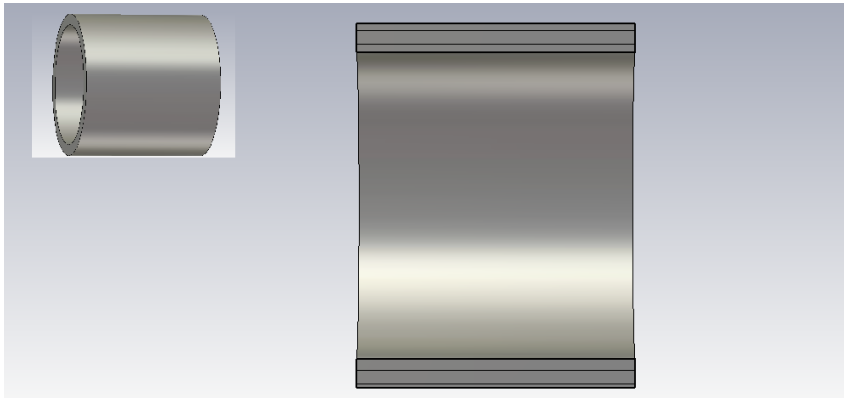


Figura 3.2: Sección de Guía Onda.

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G \\ G & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_3 \\ B_4 \end{pmatrix}$$

Donde:

$G = \text{diag}(e^{-\gamma_i L})$  matriz  $[N_g \times N_g]$  Matriz diagonal que representa la propagación de los diferentes modos en un tramo de guía.

$\gamma_i =$  Es la constante de propagación del modo  $i$  en el tramo de guía circular.

$L =$  Es la longitud del tramo.

### 3.3. Diseño de Corrugaciones

A la vista de lo explicado anteriormente es fácil intuir que si unimos dos discontinuidades seguidas y unidas por una sección de guía podemos obtener una figura como la presentada en 3.3. Esta figura representa lo que denominaremos corrugaciones y básicamente son los elementos que conforman una pared corrugada en el interior de una estructura abocinada que representa el alimentador que finalmente diseñaremos.

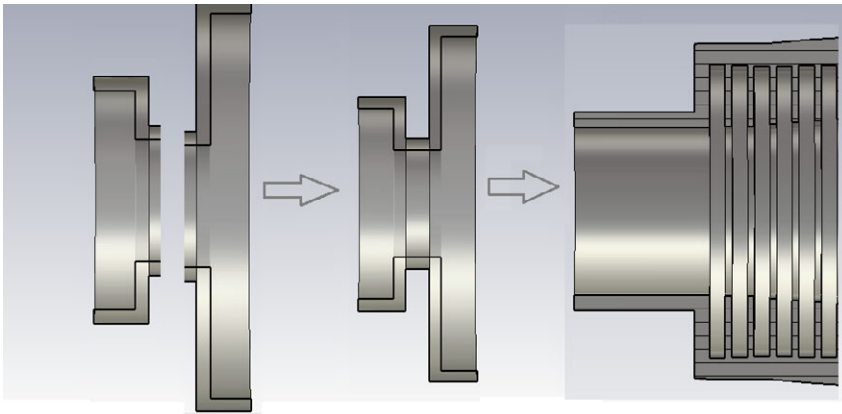


Figura 3.3: Corrugación sola

Bien, ahora en cuanto al análisis electromagnético, sabemos como obtener los parámetros  $S$ , tanto de la discontinuidad sola, como de una sección de propagación. Si representamos la unión de dos discontinuidades mediante dos cuadripolos en serie, Figura 3.4, podemos encontrar los parámetros  $S$  de este conjunto y representarlo como un solo cuadripolo nuevo, y éste tendrá sus parámetros  $S$  globales.

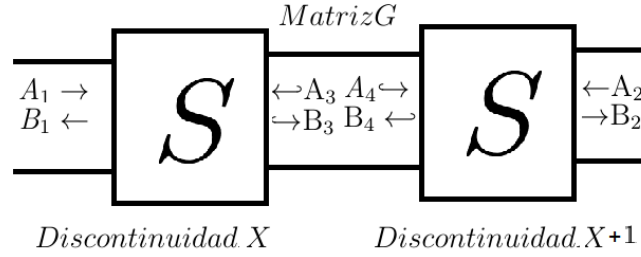


Figura 3.4: Representación de discontinuidad con cuadripolos.

El proceso es el siguiente:

$$B_1 = S_{11}^{(A)} A_1 + S_{12}^{(A)} A_3 \quad (3.2)$$

$$B_3 = S_{21}^{(A)} A_1 + S_{22}^{(A)} A_3 \quad (3.3)$$

$$B_4 = S_{11}^{(B)} A_4 + S_{12}^{(B)} A_2 \quad (3.4)$$

$$B_2 = S_{21}^{(B)} A_4 + S_{22}^{(B)} A_2 \quad (3.5)$$

Podemos sintetizar en un sistema más compacto:

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}^T & S_{12}^T \\ S_{21}^T & S_{22}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Con

$$S_{11}^T = S_{11}^A + S_{21}^A G (I - S_{11}^B G S_{22}^A G)^{-1} G S_{21}^A$$

$$S_{12}^T = S_{12}^A G (I - S_{11}^B G S_{22}^A G)^{-1} S_{12}^B$$

$$S_{21}^T = S_{21}^B G (I + S_{22}^A G (I - S_{11}^B G S_{22}^A G)^{-1} S_{11}^B G) S_{21}^A$$

$$S_{22}^T = S_{22}^B + S_{21}^B G S_{22}^A G (I - S_{11}^B G S_{22}^A G)^{-1} S_{21}^B$$

En donde:

$S_{11}^T$  La amplitud de los  $N_1$  modos reflejados en la entrada de la estructura.  
matriz  $[N_1 \times N_1]$ .

$S_{12}^T$  La potencia transmitida de los modos de la entrada a la salida.  
matriz  $[N_1 \times N_2]$ .

$S_{21}^T$  La potencia transmitida de los modos de la salida a la entrada.  
matriz  $[N_2 \times N_1]$ .

$S_{22}^T$  La amplitud de los  $N_2$  modos reflejados en la salida de la estructura.  
matriz  $[N_2 \times N_2]$ .

Antes de continuar con el diseño de estructuras más complejas vamos a mostrar algunos resultados gráficos de la simulación con el programa CST y el código utilizado en este proyecto.

La estructura bajo análisis es la representada en la gráfica 3.5, en ella se observa que existen dos discontinuidades con secciones de propagación mas grandes que las de una corrugación habitual. La estructura simplemente es un primer paso hacia nuestro objetivo, por ello no se le exige que cumpla con unas condiciones específicas.



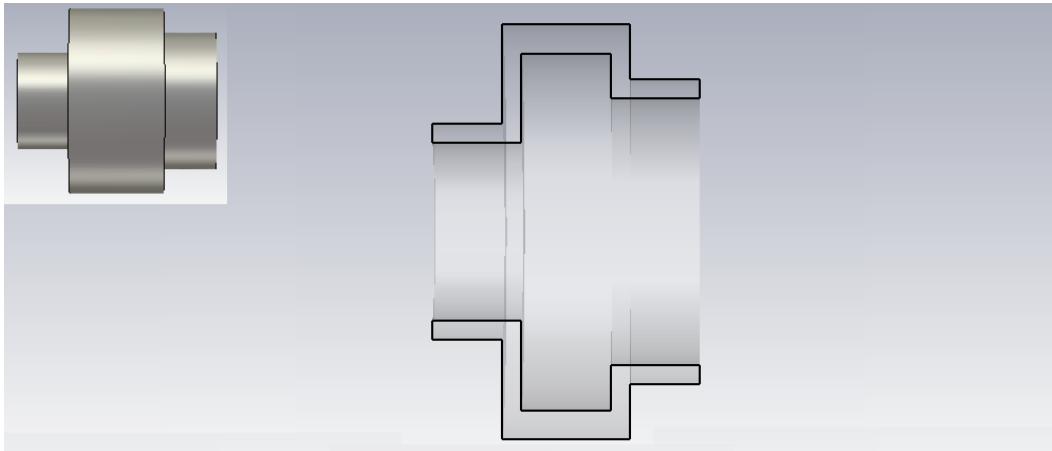


Figura 3.5: Estructura primera de análisis.

Presentamos las pérdidas de retorno de nuestra estructura. En ella podemos observar que el programa presenta una similitud considerable en cuanto a la simulación con el programa comercial CST.

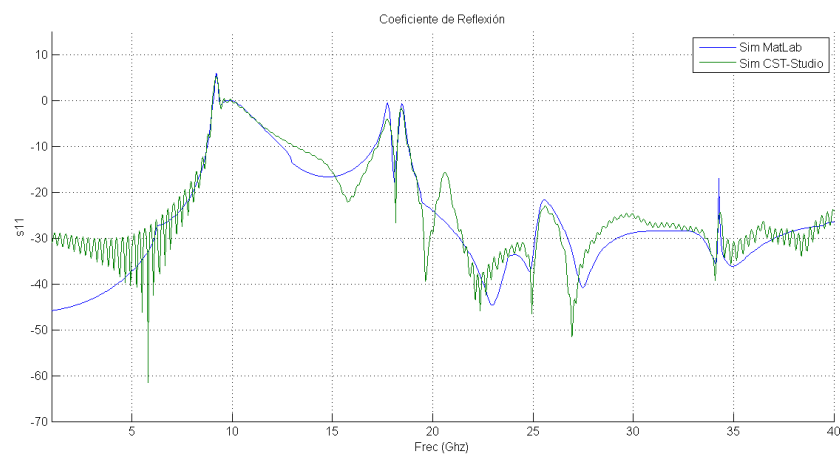


Figura 3.6: Coeficiente de Reflexión de la Primera Estructura

Los resultados varían en función del número de modos considerados en la simulación. A medida que el número de modos va aumentando los resultados se van pareciendo más al simulado con el programa comercial. Esto no es una situación ideal, puesto que alcanzado un número elevado de modos los cambios en los resultados ya no son perceptibles.

Está claro que hay una limitación para el número de modos adecuado a utilizar en la simulación, esto se estudia en la convergencia del método de análisis modal. Por tanto existe un error que se comete y lo ideal es que éste sea lo más pequeño posible.

Sabemos que el radio de una guía circular influye directamente en la cantidad de número de modos que se propagan en su interior. También hemos de decir que el estudio de la convergencia del método de análisis modal no es el objetivo de este proyecto, por lo que se adopta como solución empírica para establecer en número de modos para el análisis la propuesta en [8].

$$N_{modos} = \frac{20 * R_{out}}{\lambda} \quad (3.7)$$

En la figura 3.7, se evidencia la variación de los resultados en función del número de modos utilizados en el análisis.

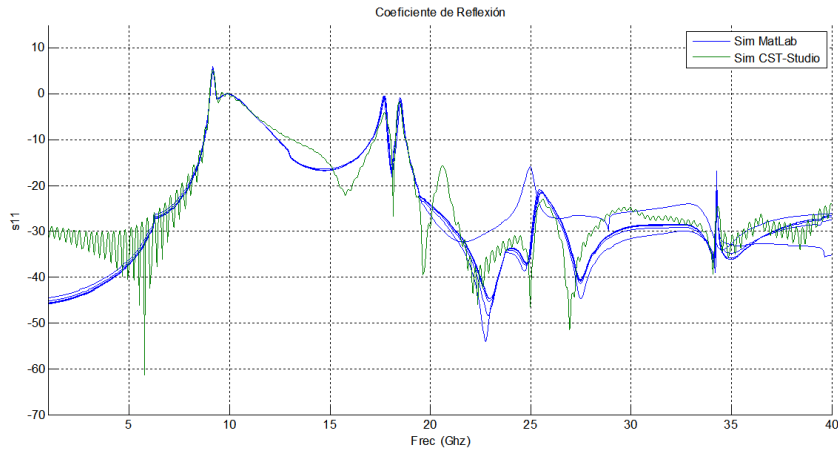


Figura 3.7: Variaciones de respuesta en función de los modos.

### 3.3.1. Parámetros de las corrugaciones

En cuanto al estudio de las corrugaciones en las paredes internas de un alimentador, existen varios estudios en los que se recogen algunas recomendaciones a adoptar. En [10] muestra algunos ejemplos de ellos. Estas corrugaciones representan una superficie reactiva a lo largo de todo el alimentador.

La expresión que describe esta reactancia es:

$$\chi_j = \frac{\delta (Y_1((k_c(a_j + d_j))) J_1((a_j k_c)) - Y_1((a_j k_c)) J_1(k_c(a_j + d_j)))}{Y_1((k_c(a_j + d_j))) J_1'((a_j k_c)) - Y_1'((a_j k_c)) J_1(k_c(a_j + d_j))} \quad (3.8)$$

En donde  $Y$  y  $Y'$  son las ecuaciones de Bessel de Segunda especie y su derivada, respectivamente. Aunque se ha mencionado con anterioridad,  $k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}$ .

Puede decirse que las corrugaciones cambian los campos en la bocina, de forma que se consiga: simetría axial en el diagrama de radiación, bajos lóbulos secundarios y baja polarización cruzada. El requisito para producir un campo radiado simétrico y con baja polarización cruzada es que el campo en la apertura sea lineal. Solo un modo híbrido [12]<sup>1</sup> puede conseguirlo.

Cuando la variación angular del modo  $TE_{11}$  desaparece y el campo tiene sólo dependencia radial se dice que esta es la condición de modo híbrido balanceado.

Para conseguir una condición de modo híbrido balanceado necesitamos que:

$\|\chi_j\| \rightarrow \infty$ . Por lo que el denominador ha de ser nulo, es decir:

$$Y_1(k_c(a_j + d_j)) J_1'(a_j k_c) - Y_1'(a_j k_c) J_1(k_c(a_j + d_j)) = 0 \quad (3.9)$$

Una solución a la expresión anterior es que  $d_j = \frac{\lambda_c}{4}$ .

Para establecer el ancho de las corrugaciones en [10] recomienda unos valores para  $P \subseteq [\frac{\lambda_c}{10}, \frac{\lambda_c}{5}]$ . De estos valores dependerá el ancho de banda de operación.

Otro de los parámetros importantes es el Ratio entre la muestra  $P$  y el ancho

---

<sup>1</sup>Para generar un modo  $TE_{11}$  se ha utilizado siempre una mezcla de 85 % de  $TE_{11}$  y 15 % de  $TM_{11}$

del diente de la corrugación  $W$ , se define como  $\delta = \frac{W}{P}$ , y es valor que condiciona los niveles de polarización cruzada, los valores recomendados por [10] son  $\delta \in [0,7 \text{ y } 0,9]$

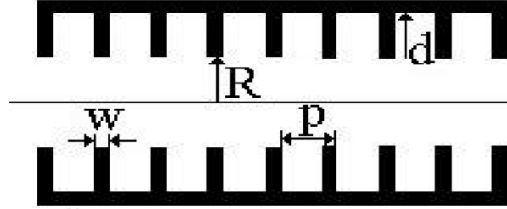


Figura 3.8: Parámetros de las corrugaciones.

### 3.4. Perfiles de pruebas de diseño

Hay un conjunto de perfiles empíricos que se han utilizado en trabajos previos en los que las ecuaciones que describen su trayectoria quedan plasmados. Aquí vamos a consignar algunos de ellos.

En todo momento estamos trabajando con guías cilíndricas a las que se les aplica una abocinamiento, esta práctica ha de tener algún tipo de tendencia (lineal, exponencial, etc). El denominador común de estas guías es que tienen: un radio de entrada  $a_i$ , un radio de salida  $a_o$ , una longitud  $L$  y que todos estos perfiles tienen simetría de revolución.

Resumimos los perfiles más comunes [11]

$$\text{Lineal} : a(z) = a_i + \frac{z(a_o - a_i)}{L}$$

$$\text{Sinusoidal} : a(z) = a_i + (a_o - a_i) \left( A \sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)^\rho + \frac{z(A+1)}{L} \right)$$

$$\text{Tangencial} : a(z) = a_i + (a_o - a_i) \left( A \tan\left(\frac{\pi z}{2L}\right)^\rho + \frac{z(A+1)}{L} \right)$$

$$X_p : a(z) = a_i + \left( A \left( \frac{z}{L} \right)^\rho + \frac{z(A+1)}{L} \right) (a_o - a_i)$$

$$\text{Exponencial} : a(z) = a_i e^{\frac{z \ln\left(\frac{a_o}{a_i}\right)}{L}}$$

$$\text{Hipérbólico} : a(z) = \sqrt{a_i^2 - \frac{z^2(a_i^2 - a_o^2)}{L^2}}$$

$$\text{Polinomial : } a(z) = \left[ a_i - \frac{z^2 (a_i + a_o) (\rho + 1) \left( \frac{\rho z}{(\rho + L + 1)} - 1 \right)}{L^2} \right]$$

En algunas de las opciones de perfil, se utiliza el parámetro  $p$ , con valores de  $p \in [\frac{1}{2}, 5]$ , en donde el valor más habitual es 2. Otro parámetro es  $A \in 0, 1$ . La elección del perfil dependerá de la aplicación en particular.

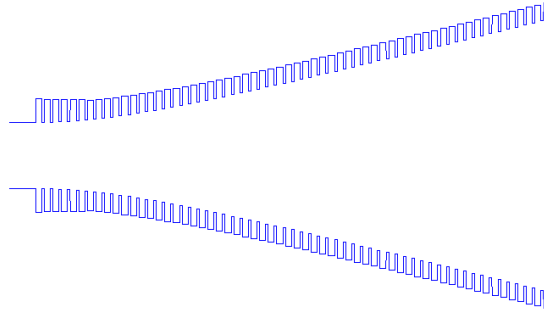


Figura 3.9: Perfil Hierbólico.

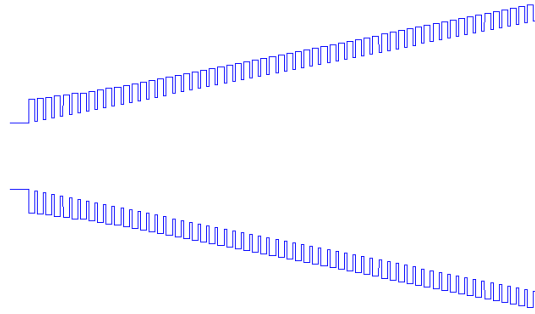


Figura 3.10: Perfil lineal.

### 3.5. Diseño de la Antena.

A la vista de la posibilidad de unir estructuras simples con la finalidad de conseguir una estructura más compleja, podemos diseñar una antena con

paredes corrugadas, de mayor tamaño y con un perfil que deseemos.

Desde el punto de vista electromagnético el procedimiento es el mismo. Una vez encontrados los parámetros  $S$  de la primera estructura de las dos discontinuidades se va uniendo nuevas discontinuidades, una a una, y obteniendo a la vez los parámetros  $S$  de la nueva unión. El proceso se repite sucesivamente hasta completar una estructura mas compleja.

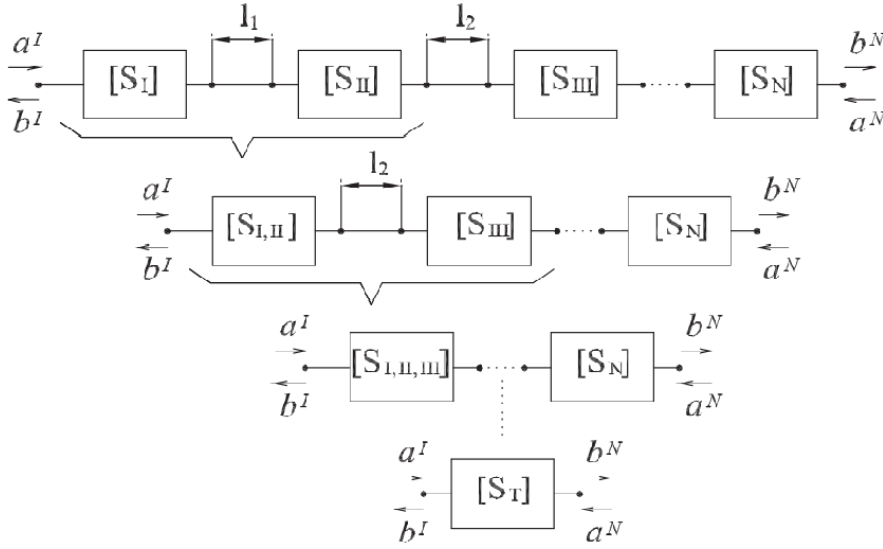


Figura 3.11: Concatenación de cuádrupolos

Bien, realizando este procedimiento llegaremos al diseño que estamos buscando, no obstante al final del proceso nos queda el análisis de la interface de la estructura con el aire, es decir, la boca radiante de nuestra estructura.

El estudio del campo cercano,<sup>2</sup> que es de gran consistencia matemática y complejidad, se hace necesario para poder finalizar el estudio de la estructura en su totalidad, donde se incluya la interface con el aire. Este estudio de los campos cercanos podría extender este trabajo considerablemente. No obstante, se han de mencionar dos aspectos. Por un lado, en las cercanías de las

<sup>2</sup>En esta zona los campos dependen de forma cuasi-estacionaria de la distribución de cargas y corrientes en el sistema radiante, se establece en  $r \leq 0.62 \sqrt{\frac{D^3}{\lambda}}$ . Siendo  $D$  la máxima dimensión lineal de la antena y  $\lambda$  la longitud de onda

estructuras, utilizadas básicamente como alimentadores de otras antenas, no se suelen encontrar obstáculos y que por otro lado, nos interesan únicamente las características de radiación en campo lejano <sup>3</sup> que, por definición, se miden en el espacio libre.

Por estas consideraciones y además que, empíricamente se han comprobado, cuando la boca de la antena tiene un diámetro superior a una longitud de onda, las amplitudes de los modos reflejados en la misma son prácticamente despreciables en comparación con los correspondientes de los modos incidentes, lo que nos permite igualar a cero todos los modos reflejados o lo que es lo mismo considerar que la antena está adaptada perfectamente en el último tramo.

La condición que el diámetro de salida sea mayor a una longitud de onda en este trabajo se cumple, por lo que podemos beneficiarnos de esta aproximación.

Podemos entonces presentar las ecuaciones que describen el tramo final de la Antena.

Tenemos por tanto:

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}^F \\ S_{21}^F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \end{pmatrix}$$

Por lo que hemos obtenido finalmente el sistema de dos ecuaciones que relaciona los cuatro vectores incógnitas. Se aprecia que el vector  $A_2$  se anula debido a nuestra aproximación.

En donde

$S_{11}^F$ : La amplitud de los  $N_1$  modos reflejados en la entrada de la Antena.  
matriz  $[N_1 \times N_1]$ .

$S_{21}^F$ : La potencia transmitida de los modos a la salida de la Antena.  
matriz  $[N_2 \times N_1]$ .

Una vez encontrados los parámetros S de la estructura, ya podemos plasmar en gráficas los patrones de radiación, esto lo explicamos en el siguiente apartado.

---

<sup>3</sup>O de Fraunhofer, suele aceptarse que la hipótesis de campo lejano se cumple cuando se verifican las tres condiciones:

$r \geq \frac{2D^2}{\lambda}$   
 $r \gg D$   
 $r \gg \lambda$

### 3.6. Diagramas de radiación

Conocidas las amplitudes de los modos incidentes en la apertura y supuestas despreciables las correspondientes de los modos reflejados en la misma, podemos calcular los diagramas de radiación de la Antena como sumas algebraicas en módulo y fase, de los campos radiados por cada uno de los modos presentes en la boca radiante de la estructura.

El sistemas de coordenadas de trabajo es el esférico (3.12) por tanto tenemos:

$$E_\theta = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot e_{\theta i} \quad (3.11)$$

$$E_\phi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot e_{\phi i} \quad (3.12)$$

Siendo:

$\alpha_i$  : Representan las amplitudes complejas de los modos radiados  $i$ , ya sean  $TE$  o  $TM$  que inciden sobre la apertura de la Antena.

$e_{\theta i}, e_{\phi i}$ : Las dos componentes del campo lejano radiado por la antena como consecuencia del modo propagado en el interior de la misma. Estas componentes tiene como amplitud máxima la unidad, ya que están normalizados en potencia.

Para determinar las dos últimas expresiones ( $e_{\theta i}, e_{\phi i}$ ) de los modos, se utiliza el modelo utilizado en [2]. La elección de este método conduce a expresiones cerradas y sus resultados tienen un buen grado de aproximación a los medidos en bocinas reales de tamaño eléctricamente grandes.

#### Diagrama radiado por una apertura

Si nos referimos a las expresiones detalladas en [3], en donde proporcionan las expresiones de los campos radiados por una apertura de sección transversal circular, que aquí citamos:

$$E_R = 0 \quad (3.13)$$

$$E_\theta = \frac{jk e^{-jkR}}{4\pi R} \left[ 1 + t \left( \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \right) \left( \frac{\mu}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta) \right] (N_x \cos(\phi) + N_y \sin(\phi)) \quad (3.14)$$



$$E_\phi = \frac{-jk e^{-jkR}}{4\pi R} \left[ \cos(\theta) + t \left( \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \right) \left( \frac{\mu}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \right] (N_x \sin(\phi) - N_y \cos(\phi)) \quad (3.15)$$

En las expresiones anteriores los términos  $N_x, N_y$ , representan los campos iluminantes en la apertura circular transversal de la Antena. Estos están en función de los vectores de radiación  $N_x$  y  $N_y$  que se calculan resolviendo las integrales que los definen.

En la figura 3.12, podemos ver la necesidad de calcular estas expresiones en un sistema de coordenadas rectangulares, no así para los campos radiados para lo que es necesario otro sistema de coordenadas. Por lo que:

$$N_x = \int \int_{S_g} E_x(x', y') e^{j(k_{x'}x + k_{y'}y)} dx' dy' \quad (3.16)$$

$$N_y = \int \int_{S_g} E_y(x', y') e^{j(k_{x'}x + k_{y'}y)} dx' dy' \quad (3.17)$$

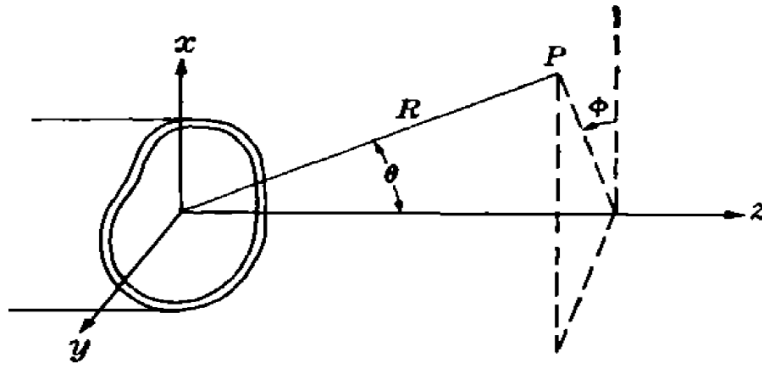


Figura 3.12: Coordenadas de trabajo

En ellas  $k_{x'}, k_{y'}$  representan los números de onda en las dos direcciones espaciales y se definen como:

$$k_{x'} = K \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$k_{y'} = K \sin(\theta) \sin(\phi)$$

Tal como se ha realizado en todo este proyecto, el análisis particularizado para cada modo, el vector de radiación también se calculará para cada una de las familias modales.

Para  $N_x$ , tenemos la componente  $E_x$ .

$$E_x = \frac{j\omega\mu K_{mn}}{2} \left[ J_{m-1}(K_{mn}\rho) \sin((m-1)\psi) + J_{m+1}(K_{mn}\rho) \sin((m+1)\psi) \right]$$

Para  $N_y$ , tenemos la componente  $E_y$ .

$$E_y = \frac{j\omega\mu K_{mn}}{2} \left[ J_{m-1}(K_{mn}\rho) \cos((m-1)\psi) - J_{m+1}(K_{mn}\rho) \cos((m+1)\psi) \right]$$

Sabiendo que en nuestro sistema de coordenadas  $x = \rho \cos(\psi)$ , y que  $y = \rho \sin(\psi)$ , podemos sustituir estas dos últimas ecuaciones en las expresiones 3.16 y 3.17, dando como resultado:

$$N_x = \frac{j\omega\mu K_{mn}}{2} \int_{\rho=a}^{\rho=a} \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} e^{jk\rho \sin(\theta) \cos(\phi-\psi)} \left[ J_{m-1}(K_{mn}\rho) \sin((m-1)\psi) + \dots \right. \\ \left. \dots J_{m+1}(K_{mn}\rho) \sin((m+1)\psi) \right] \rho d\psi d\rho \quad (3.18)$$

$$N_y = \frac{j\omega\mu K_{mn}}{2} \int_{\rho=a}^{\rho=a} \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} e^{jk\rho \sin(\theta) \cos(\phi-\psi)} \left[ J_{m-1}(K_{mn}\rho) \cos((m-1)\psi) - \dots \right. \\ \left. \dots J_{m+1}(K_{mn}\rho) \cos((m+1)\psi) \right] \rho d\psi d\rho \quad (3.19)$$

En la que hemos sustituido la fórmula del Coseno de la diferencia de dos ángulos.

$$\cos(\phi - \psi) = \cos(\phi) \cos(\psi) - \sin(\phi) \sin(-\psi)$$

Las soluciones analíticas para estas expresiones son extensas, de gran complejidad y vienen desarrolladas en [9]. Aquí solo recogemos algunas expresiones utilizadas en su desarrollo.

- Series de Bessel - Fourier:

$$e^{j\lambda\rho\cos(\phi-\psi)} = J_0(\lambda\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} 2j^n J_n(\lambda\rho) \cos(\phi - \psi)$$

- Integral de Lommel:

$$\int_0^x x J_n(\alpha x) J_n(\beta x) dx = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} \left[ J_n(\alpha x) \frac{d}{dx} J_n(\beta x) - J_n(\beta x) \frac{d}{dx} J_n(\alpha x) \right]$$

- Relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel:

$$J'_m(z) = \frac{1}{2} \left[ J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z) \right]$$

$$\frac{m}{2} J_m(z) = \frac{1}{2} \left[ J_{m-1}(z) + J_{m+1}(z) \right]$$

$$z \cdot J'_m(z) = z \cdot J_{m-1}(z) - m J_m(z)$$

Las últimas sustituciones que hemos de contemplar en este desarrollo es que:  $J'_m(k_{mn}\alpha) = 0$  (para los modos  $TE$ ),  $J_m(k_{mn}\alpha) = 0$  (para los modos  $TM$ ) y que  $\Gamma = 0$  (Adaptación Antena-Espacio), para finalmente desarrollar las expresiones 3.14 y 3.15 en función de las distintas familias de modos, llegando a concluir que nos queda.

Para:

1. Modos  $TE_{mn}$

$$E_\theta = j^{m+1} \frac{e^{-jkR}}{2R} \omega \mu m \left[ 1 + \frac{\beta_{mn}}{K} \cos(\theta) \right] J_m(K_{mn}a) \frac{J_m(Ka \sin(\theta))}{\sin(\theta)} \sin(m\phi) \quad (3.20)$$

$$E_\phi = j^{m+1} \frac{e^{-jkR}}{2R} \omega \mu K a \left[ \frac{\beta_{mn}}{K} + \cos(\theta) \right] J'_m(K_{mn}a) \frac{J_m(Ka \sin(\theta))}{1 - \left( \frac{K \sin(\theta)}{K_{mn}} \right)^2} \cos(m\phi) \quad (3.21)$$

2. Modos  $TM_{mn}$ 

$$E_\theta = j^{m+1} \frac{e^{-jkR}}{2R} \frac{KaK_{mn}}{2r \sin(\theta)} \left[ \frac{\beta_{mn}}{K} + \cos(\theta) \right] J'_m(K_{mn}a) \frac{J_m(Ka \sin(\theta))}{1 - \left( \frac{K_{mn}}{K \sin(\theta)} \right)^2} \sin(m\phi) \quad (3.22)$$

$$E_\phi = 0 \quad (3.23)$$

Donde:

$J_m, J'_m$  : Función de Bessel y su derivada, respectivamente, de primera especie de orden  $m$

$K_{mn}a$  : Representa la  $n$ -ésima raíz de  $J_m$  o  $J'_m$ , según sea el caso.

$\beta_{mn}$  : Representa la constante de propagación  $\sqrt{k^2 - K_{mn}^2}$

$K, \omega, \mu$ : La constante de propagación en el vacío, frecuencia angular de trabajo y permeabilidad del vacío respectivamente.

$a$ : Es el radio de salida de la Antena.

Explicados los desarrollos matemáticos ahora ya podemos presentar algunas gráficas en las que se observan los resultados de las simulaciones en CST y comparar con los obtenidos con el código utilizado en el desarrollo en este Proyecto de Fin de Carrera.

# Capítulo 4

## Validación.

En esta parte del proyecto se pretende realizar una comparación de los resultados generados por el código implementado en Matlab y los resultados con el programa de análisis electromagnético CST.

En cuanto a las variables utilizadas en el programa Suite CST se ha de mencionar que se han exportado, de nuestro código, los valores de radios de entrada, salida, longitud y las dimensiones de las discontinuidades para generar una estructura geoméricamente igual y poder realizar un análisis electromagnético fiel en ambos ambientes de trabajo.

### 4.1. Análisis de una Antena y comparativa con simulación en CST

Se trata entonces de un análisis con los valores de una simulación y diseño que hemos extraído de [10], así tenemos otra referencia, para dar por válido el desarrollo, aunque los resultados no son idénticamente iguales, debido a varios factores, como por ejemplo, convergencia del método, observamos que la tendencia es la misma.

En una posible continuación de este proyecto se podrían realizar mejoras en cuanto a los resultados se refiere, aquí reflejamos algunos valores utilizados:

**Frecuencia de trabajo** :12.71 *Ghz*

**Frecuencia inicial de análisis** : 10.75 *Ghz*

**Frecuencia final de análisis** : 14.5 *Ghz*

**Radio de salida** : $1.95\lambda_c = 46,92 \text{ mm}$

**Radio de entrada** : $\frac{3\lambda_c}{2\pi} = 11,49 \text{ mm}$

**Longitud de onda de corte  $\lambda_c$  :** 24,08 mm

El perfil, se trata de un perfil Hiperbólico para una antena corrugada cilíndrica, donde podemos diferenciar dos partes: la primera consta de 5 *Slot's*,  $N_{MC}$  que representa el convertidor de modo de profundidad variable [10], y una segunda de 55 *Slot's*.

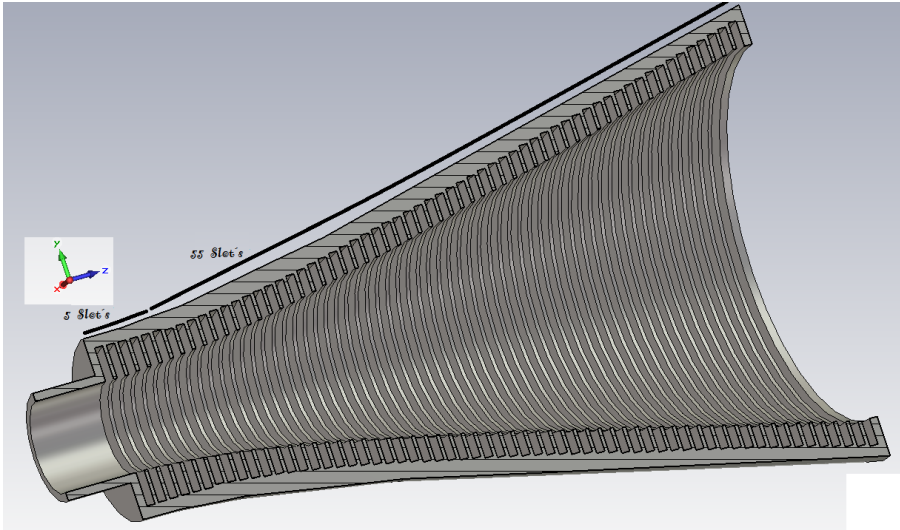


Figura 4.1: Alimentador bajo análisis.

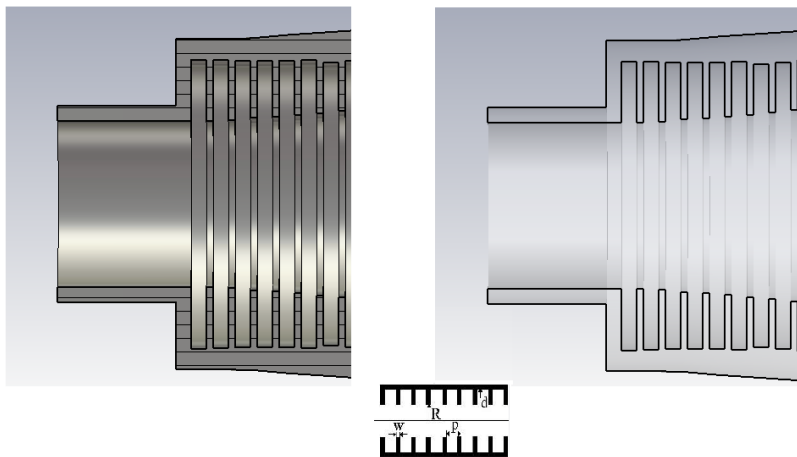


Figura 4.2: Perfil de las corrugaciones.

Algunos datos referentes a las corrugaciones son:

Slot Pitch,  $P = 3mm$

Slot pitch to width ratio  $\delta = 0.7$

Width,  $w = \delta P$

Número de Slot's =60

Longitud total  $NP = 180$  mm

## 4.2. Diagramas de Campo.

Introducimos las gráficas generadas por CST (azul), donde la simulación se ha realizado con una excitación mediante un puerto que genera 3 modos para el análisis. Igualmente se plasma las gráficas generadas en MatLab (rojo).

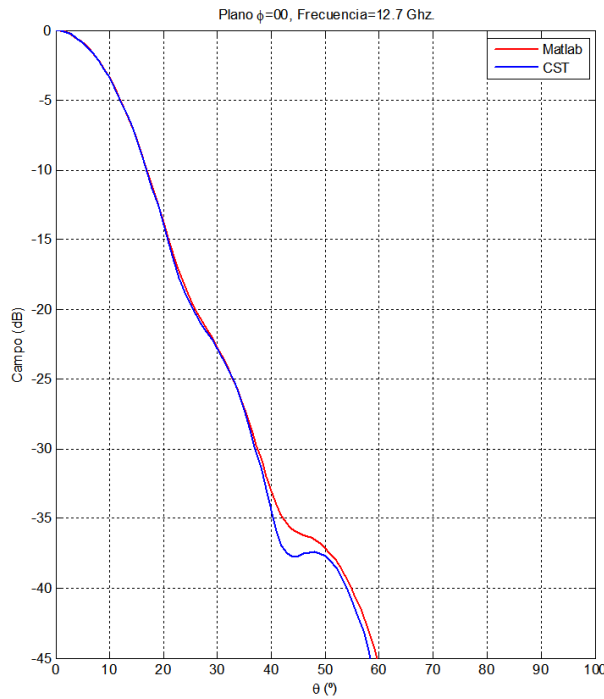


Figura 4.3: Corte en plano  $\phi = 0^\circ$ .

Podemos apreciar la similitud de los diagramas de radiación, el plano elegido para una primera comparativa es el plano  $\phi = 0^\circ$ . Si observamos el lóbulo secundario, nos percatamos que las gráficas pierden su semejanza. Esto es una característica propia del método utilizado.

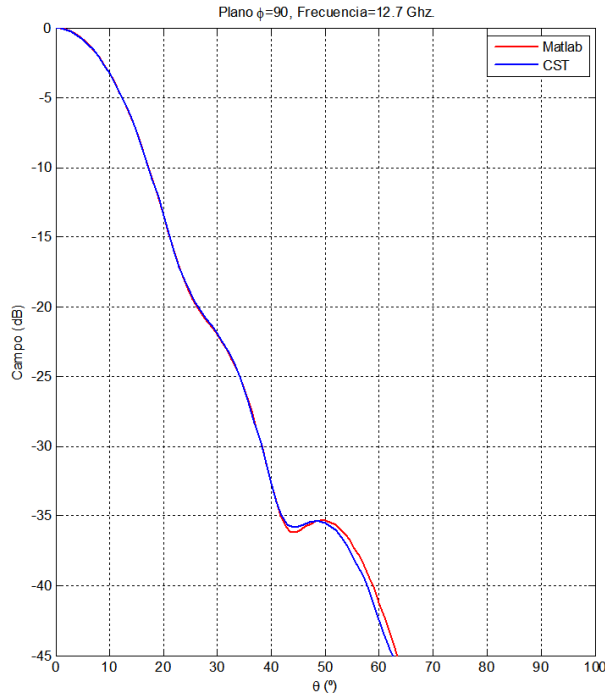


Figura 4.4: Corte en plano  $\phi = 90^\circ$ .

La figura anterior nos muestra el corte para  $\phi = 90^\circ$ , la similitud en las gráficas se sigue manteniendo y de igual forma en la posición del lóbulo secundario se aprecia la diferencia entre lo simulado y lo calculado con Matlab.

Como información de algunos datos técnicos del alimentador simulado y extraídos del programa CST son: Ganancia 20.0 dB,  $\Delta_{-3dB} = 19.3^\circ$ ,  $\Delta_{-10dB} = 33.6^\circ$  y  $NLPS = -31,8 \text{ dB}$ .

Esto nos da una idea del tipo de Alimentadores que podemos simular una vez



implementado el código en MatLab. Se ha de mencionar que en este proyecto no se han implementado las expresiones matemáticas que nos proporcione estos valores.

En la gráfica, que a continuación mostramos, se realiza una comparación de los dos planos presentados más uno adicional, el plano  $\phi = 45^\circ$ . Este conjunto de planos nos muestra la simetría de revolución, característica propia de las antenas de bocina.

Como se aprecia, la igualdad se sigue manteniendo. El último plano añadido nos permite también observar los niveles de polarización cruzada, que desde luego tiene niveles inferiores a  $38dB$  por debajo del máximo.

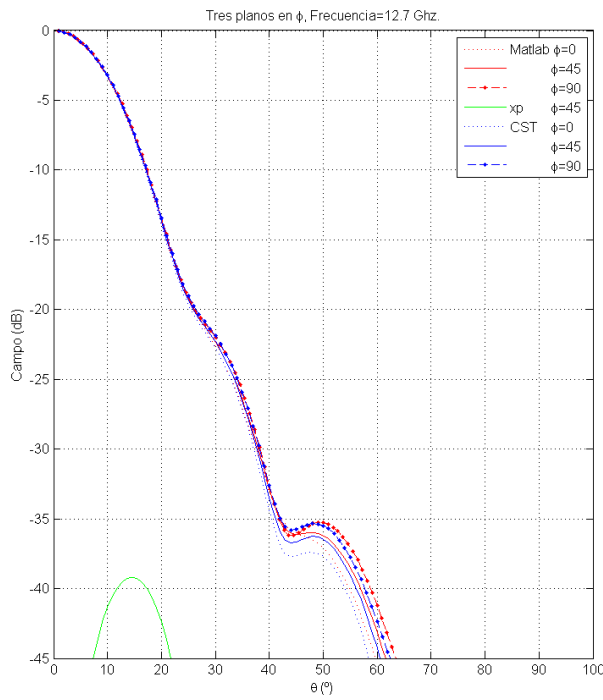


Figura 4.5: Comparación en tres planos a 12.7 Ghz.

Para apreciar mejor las diferencias en cuanto a los resultados simulados con los calculados en MatLab y dado que estas diferencias son pequeñas, presentamos una gráfica ampliada con la posición del lóbulo secundario y las variaciones en los tres planos.

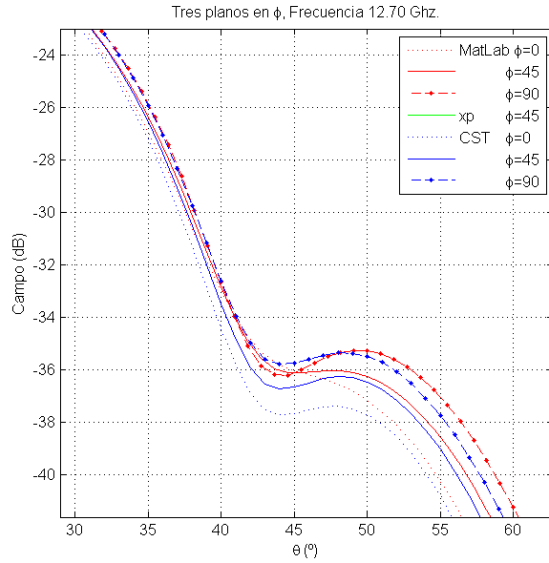


Figura 4.6: Comparación en tres planos a 12.7 Ghz con ampliación.

Las simulaciones en CST se realizaron en un rango de frecuencias podemos, en la misma línea realizar las comparaciones en otra frecuencia y ver si hay variaciones en cuanto a los resultados.

Con este objetivo mostramos los diagramas para una frecuencia de 14 GHz. En ella se aprecia que no hay discrepancias mayores en los diagramas de radiación.

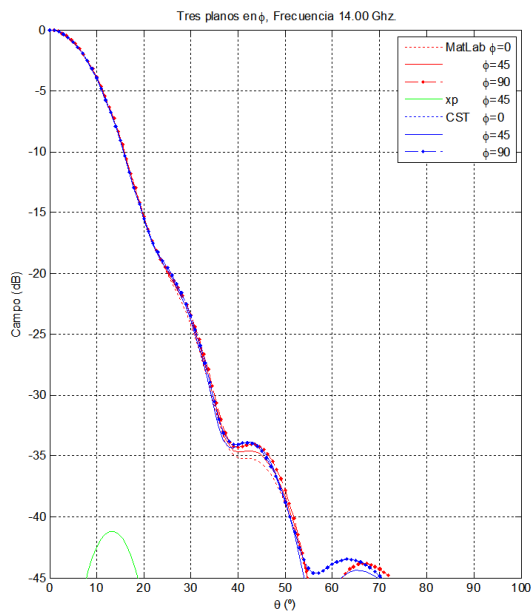


Figura 4.7: Comparación en tres planos a 14 Ghz

Finalmente presentamos una variación del diagrama de radiación en función de la frecuencia. Esta gráfica solo nos muestra que en un rango de frecuencias no hay variaciones abruptas y que los diagramas siguen una tendencia esperada. No se ha realizado la comparación con CST ya que como se ha visto las diferencias son mínimas y si pusiésemos todas en una sola gráfica crearía mas confusión que información.

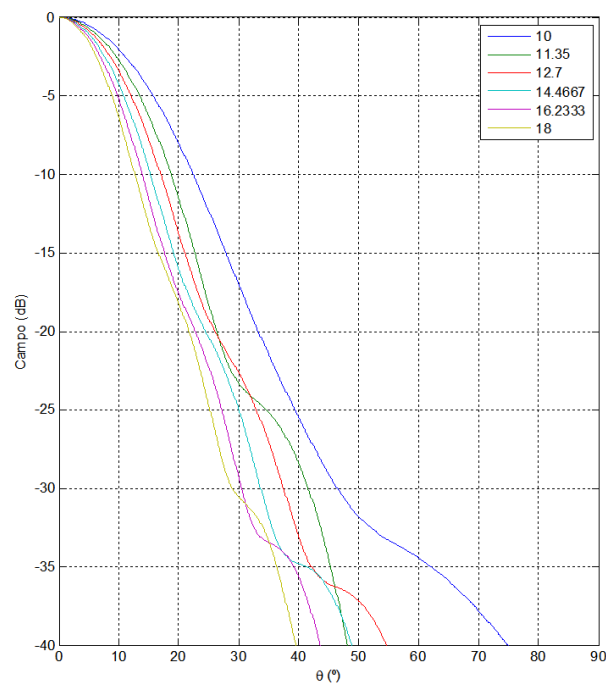


Figura 4.8: Barrido en frecuencia en rango de 10 a 18 Ghz

Como última gráfica se presenta el coeficiente de reflexión donde se aprecian más diferencias en los datos y su variación en función de la frecuencia. Claro está que no esperamos una gráfica idéntica pero su tendencia nos da información de los resultados a esperar.

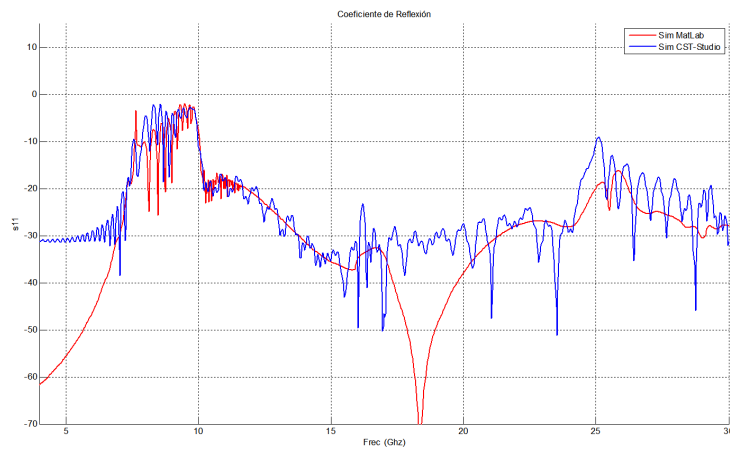


Figura 4.9: Coeficiente de Reflexión.

# Capítulo 5

## Conclusiones.

Durante el desarrollo de las distintas asignaturas de la carrera universitaria he vivido situaciones en donde ha quedado plasmado la complejidad intrínseca de cursar una carrera técnica en telecomunicaciones. En el desarrollo del Proyecto de Fin de Carrera he dado un paso más adelante en cuanto a la autonomía y esfuerzo de refiere, sin dejar de lado la amplia experiencia adquirida. Vamos a reflejar algunas conclusiones que hemos obtenido del desarrollo de este trabajo:

- 1 Aunque hemos estado familiarizados con el manejo de expresiones matemáticas complejas en el estudio del Método de Análisis Modal se ha visto que la complejidad ha sido aún mayor. El Método ha mostrado ser sustancialmente complejo en cuanto al desarrollo matemático se refiere como a su implementación en un programa de análisis matemático. Lla gran ventaja es que definitivamente los resultados son muy buenos y por ello se explica su estudio y el interés que despierta.
- 2 La complejidad de implementar las expresiones matemáticas en un programa de análisis simbólico ha sido reducida gracias a la versatilidad y robustez del programa de análisis Matlab. Hemos adquirido mayor experiencia en el manejo de esta eficaz herramienta llegando a hacer uso de la interface de cálculo simbólico y sus bondades en la búsqueda de soluciones a ecuaciones diferenciales.  
Matlab ha resultado ser un herramienta muy útil y potente a la hora de experimentar y encontrar soluciones a las ecuaciones matemáticas. Ecuaciones que, tratándose de los desarrollos integrales y de aproximaciones aplicados sobre las ecuaciones de Maxwell y el desarrollo de la teoría electromagnética, si no se utilizan programas de cálculo matemático serían casi imposibles analizar con el nivel universitario con el que disponíamos.
- 3 En la misma línea puedo decir que el Método de Análisis Modal, una

vez estudiado, ha resultado ser un Método fiable a la hora de realizar simulaciones en pocos espacios de tiempo, con simplificaciones en la implementación en los diseños y desde luego con resultados muy semejantes a los proporcionados por otras herramientas de análisis Electromagnético comerciales.

El estudio de las discontinuidades mediante el método de análisis ha sido a posteriori fundamental para poder cumplir con los objetivos propuestos en este proyecto y finalmente se ha podido realizar la simulación de una antena de bocina cónica corrugada. Dejando claro que el método no es válido solo para bocinas lisas sino que también se pueden adaptar para el análisis de corrugaciones.

- 4 En cuanto a las simulaciones con el programa CST, he de decir que se han realizado una infinidad de pruebas hasta llegar a adquirir gran manejo de dicha herramienta, dejando una conclusión clara, que es que si no se sabe lo que se lo que debemos esperar como resultados es absurdo realizar experimentos aleatorios ya que los resultados igualmente serían aleatorios.

Igualmente puedo concluir que la interacción entre estas dos herramientas es posible y sin mayor dificultad. De hecho han sido necesarias para poder comparar la misma estructuras en los dos ambientes de trabajo.

Una vez comprendido toda la complejidad del Método y sus aplicaciones y las herramientas tanto de análisis como de simulación podemos dar paso a la creatividad y proponer algunas líneas de continuidad, este trabajo representa el primer paso para un amplio camino a considerar en el estudio de alimentadores de bocinas corrugadas y sus variantes.

# Capítulo 6

## Líneas Futuras de Trabajo.

Dada la robustez del método en cuanto a los resultados y los tiempos reducidos de cálculo empleados en las simulaciones, a partir de este proyecto se abre una infinidad de posibilidades como líneas de investigación futuras. A continuación presentamos unas pocas líneas a seguir a manera de recomendación:

- 1 *Obtención de características de la Antena*

En la presentación de resultados se ha echado en falta las características propias de una antena. Características como: La Ganancia, El ancho de haz a -3 dB, -10 dB o el ancho entre los primeros ceros del haz principal. Esto sería la primera ampliación a realizar. Con la implementación matemática de estos valores podremos realizar diseños de antenas para algunas aplicaciones prácticas de las antenas de Bocina Corrugadas.

- 2 *La optimización en diseños de alimentadores con paredes corrugadas.*

Nuestro proyecto se ha limitado al diseño de alimentadores con paredes corrugadas y a una formulación matemática exhaustiva con la finalidad de comprender el método utilizado para la síntesis de dicho alimentador. Como un avance en esta misma línea se propone una optimización de los parámetros de las corrugaciones y en general de la misma estructura del alimentador, como por ejemplo el tamaño de la estructura o el tamaño de las corrugaciones, en este sentido se ha de mencionar que se pueden adaptar algunos algoritmos ya diseñados para otros perfiles a estas antenas de bocina con paredes corrugadas.

- 3 *El análisis y la síntesis de Alimentadores mixtos (perfiles combinados).*

Puesto que se ha mencionado la existencia de varios perfiles para el diseño de estructuras, otra línea de continuidad sería el realizar estructuras

como resultado de mezclar estos perfiles adaptando las expresiones de análisis y logrando resultados hasta estos momentos desconocidos.

4 *El estudio de Alimentadores Coaxiales.*

Otro de los pasos a dar sería el estudio y la implementación de antenas cilíndricas coaxiales. Este tipo de antenas podría garantizar en la parte inicial de la estructura una combinación de modos ideal. Modos que al ser propagados puedan mejorar de forma considerable los diagramas de radiación hasta el momento presentados.

5 *El estudio de alimentadores mixtos, coaxiales y corrugados.*

Finalmente proponemos realizar la implementación de alimentadores mixtos, es decir, una combinación de los perfiles cilíndrico y coaxial. Aunque esto requiera de un equipamiento con alto nivel de procesamiento, los resultados que se esperarían serían beneficiosos para las innumerables áreas de aplicación.

Como se ha mencionado al principio son sólo unas recomendaciones, si aplicamos el método al estudio de filtros, por ejemplo, se abriría un nuevo abanico de posibilidades.



# Bibliografía

- [1] Teoría Electromagnética.  
Campos y Ondas.  
Carl. T. A. Johnk. pag 487-497.
  
- [2] Silver-Microwave Antenna Theory and Desing.  
McGraw - Hill Book Company, Inc.
  
- [3] R. E. Collin, Field Theory of Guided Waves.  
McGraw-Hill, New York, 1960, pp. 409-452.
  
- [4] L. Lewin, On the resolution of a class of waveguide discontinuity problems  
by the use of singular integral equations.  
IRE Trans. Microwave Theory and Techniques, Vol. MTT-9, July 1961,  
pp. 321-332.
  
- [5] P. J. B. Clarricoats, K. R. Slinn, Numerical method for the solution of  
waveguide discontinuity problems.  
Electron. Lett., 1966, Vol. 2, pp. 226-228.
  
- [6] A. Wexler, Solution of waveguide discontinuities by modal analysis.  
IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., MTT-15 (9), Sep. 1967;  
pp.508-517.
  
- [7] R. E. Collin, Field Theory of Guided Waves.  
McGraw-Hill, New York, 1960, pp 335-336.
  
- [8] Análisis y Optimización del perfil interno de bocinas cónicas lisas  
Proyecto Fin de Carrera

Universida Politécnica de Madrid

- [9] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, 1972.  
Abramowitz Stegun Chapter 9
  
- [10] Desing of Corrugated Horns.  
Christophe Granet and Graeme L, James.  
International Journal of Advanced Technology Engineering Research  
(IJATER)
  
- [11] Profiled Horns and Feeds  
Trevor S. Bird, Principal Antengenuity, CSIRO Fellow  
Christophe Granet, BAE Systems Australia
  
- [12] A. D. Olver, P. J. B. Clarricoats, A. A. Kishk and L. Shafai  
Microwave Horns and Feeds, IEE Electromagnetic Waves  
Series, Volumen 39, 1994.